

## **Vorlesung: Rauschen Theorie**

Die Themen dieser Vorlesung sind:

- Rauschsignal im Zeitdomain
- Analyse im Frequenzbereich, Spektrale Leistungsdichte des Rauschsignals
- Spektrale Leistungsdichte vom Dioden-Leckstrom (Schrotrauschen)
- Spektrale Leistungsdichte vom thermischen Rauschen in einem Widerstand
- Fotodiode und ihr Signal zu Rauschen Verhältnis

### **Rauschen**

Elektronisches Rauschen ist unsere Wahrnehmung von Schwankungen im Stromfluss oder Spannung. Für die Berechnung der Amplitude des Rauschsignals ist es wichtig die Quelle des Rauschens zu kennen und mathematisch zu beschreiben (die Eingangsgröße) und die Übertragungsfunktion des Messgeräts (der Schaltung) zu kennen.

Die Übertragungsfunktion kann als frequenzabhängige komplexe Funktion  $H(s)$  (Quotient von Fourier- oder Laplace-transformierten Signalen) dargestellt werden, wenn das Messgerät (die Schaltung) zeitlich unverändert bleibt.

$$H(s) = V_{\text{out}}(s)/V_{\text{in}}(s)$$

Die Schaltung kann auch mithilfe einer Impulsantwort dargestellt werden. Die Darstellung mithilfe von Impulsantwort ist geeignet, wenn sich das Messgerät zeitlich verändert – z.B. es wird in einem Moment eingeschaltet.

Impulsantwort (impulse response) ist die Antwort auf einen Dirac-Impuls mit der Fläche 1 am Eingang. Es ist nicht zu verwechseln mit der Sprungantwort (step response), die die Antwort auf eine Stufenfunktion am Eingang ist. Impulsantwort kann man durch Zeitableitung der Sprungantwort herleiten. Die Sprungantwort ist das Integral von der Impulsantwort. Impulsantwort ist ebenfalls die inverse Laplace- oder Fourier Transformation der Übertragungsfunktion  $V_{\text{out}}(s)/V_{\text{in}}(s)$  weil die Laplace- oder Fourier Transformationen von einem Dirac-Impuls 1 sind.

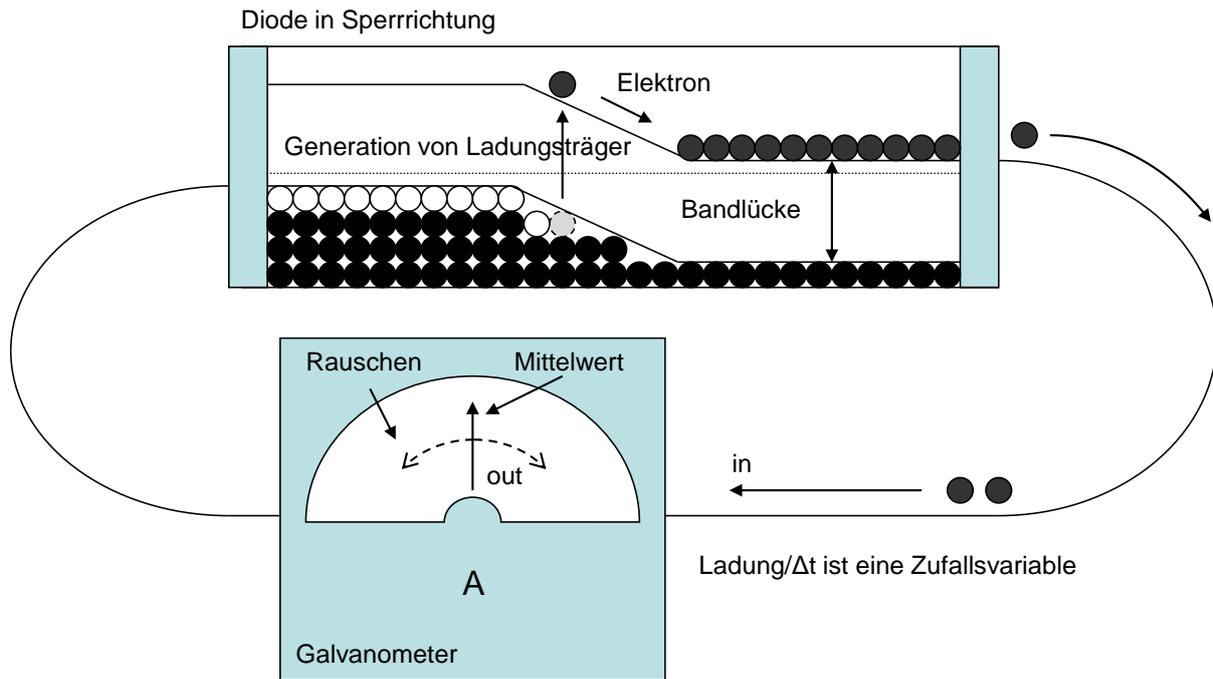


Abbildung 1: Elektronisches Rauschen ist unsere Wahrnehmung von Schwankungen im Stromfluss oder Spannung. Quelle: Generation von Elektron-Loch Paaren ist ein Zufallsprozess charakterisiert durch Mittelwert  $\mu$  und Standardabweichung  $\sigma$ . Fluktuation im Stromfluss wird im Messgerät verstärkt.

Abbildung 2 stellt das Messgerät als Amperemeter (bzw. Galvanometer) dar. Dieses Gerät hat eine Ausgangsgröße, hier dargestellt als Zeigerwinkel ( $\varphi$ ), ansonsten kann die Ausgangsgröße auch eine Spannung oder Strom sein.

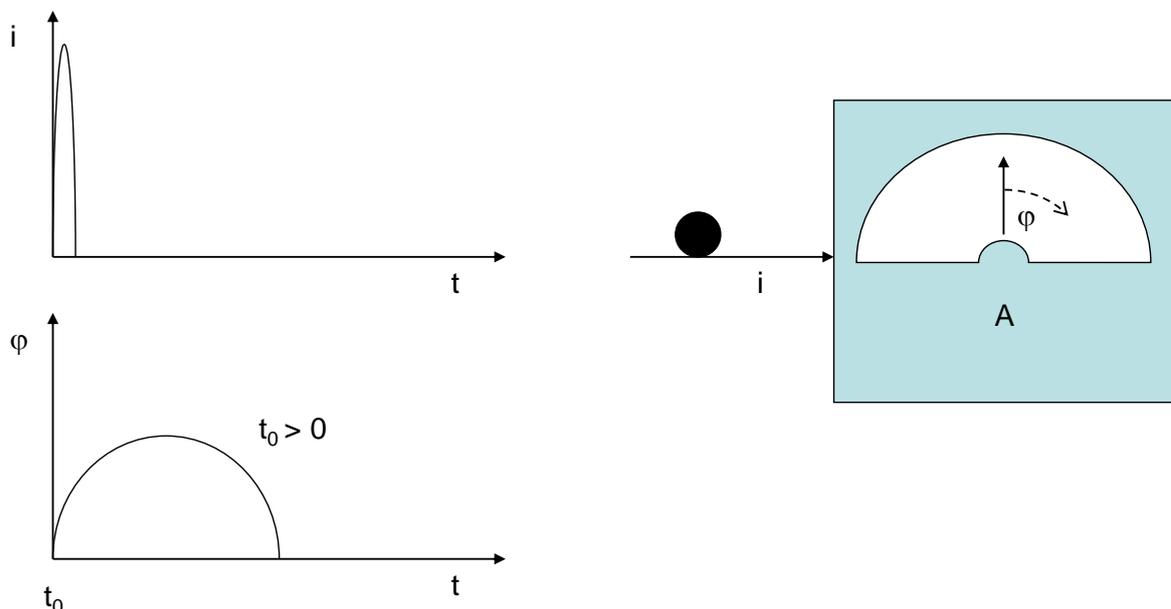


Abbildung 2: Impulsantwort des Messgeräts. Die Ausgangsgröße  $\varphi$  hat einen bestimmten zeitlichen Verlauf, wenn am Eingang ein Strom- oder Spannungsimpuls mit Fläche  $1As/IVs$  empfangen wird.

Jede beliebige Eingangsfunktion kann als Summe von Dirac-Impulsen mit verschiedenen Amplituden dargestellt werden. Der Ausgang ist dann ebenfalls die Summe von einzelnen Impulsantworten (Abbildung 2, links) multipliziert mit entsprechenden Amplituden (Abbildung 3). Die Annahme ist, dass das System linear ist.

Nehmen wir nun an, dass das Eingangssignal ein Rauschsignal ist.

Versuchen wir das Ausgangssignal im Zeitpunkt  $t$   $\varphi(t)$  zu berechnen.

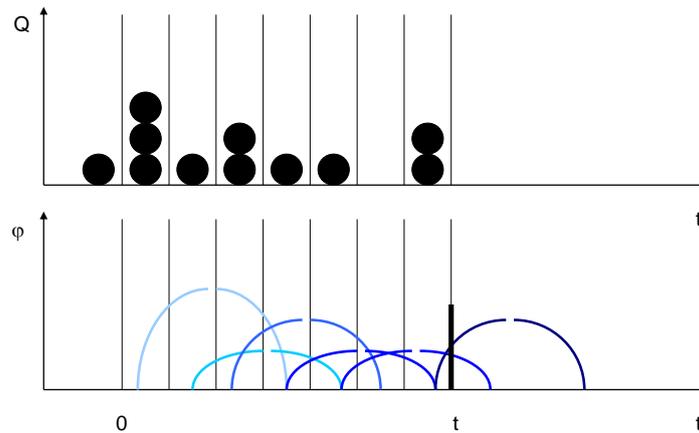


Abbildung 3: Jede beliebige Eingangsfunktion kann als Summe von Dirac-Impulsen mit verschiedenen Amplituden dargestellt werden. Der Ausgang ist ebenfalls die Summe von einzelnen Impulsantworten multipliziert mit entsprechenden Amplituden.

Wir quantisieren die Zeit, indem wir Zeitintervallen  $t_{i+1} - t_i = \Delta t$  definieren.

Das rauschbehaftete Eingangssignal hat in jedem Intervall die Fläche (Amplitude)  $Q_i$ . Im Fall vom Stromrauschen ist die Einheit für die Amplitude  $A_s$  bzw. Im Fall von Spannungsrauschen  $V_s$ . Nehmen wir auch an, dass  $Q_i$  ein Zufallswert ist und dass alle  $Q_i$  Werte voneinander unabhängig sind.

$Q_i$  ist durch den Mittelwert  $\langle Q_i \rangle$  und die Varianz  $\langle (Q_i - \langle Q_i \rangle)^2 \rangle$  beschrieben.

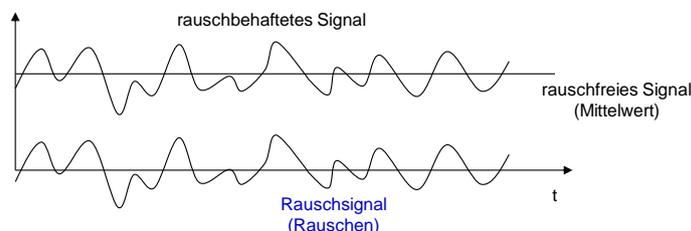
Die eckigen Klammern symbolisieren Mittelwert.

Der Mittelwert  $\langle Q_i \rangle$  ist das rauschfreie Signal.

Die Rauschamplitude definieren wir wie folgend:

$$q_i = Q_i - \langle Q_i \rangle$$

Wir ziehen also von der rauschbehafteten Amplitude ihren Mittelwert. Mittelwert der Rauschamplitude ist 0. Die Varianz ist dann einfach  $\langle q_i^2 \rangle$ .



Das Rauschsignal am Ausgang des Messgeräts im Moment  $t$   $\varphi(t)$  ist näherungsweise die Summe von allen Impulsantworten verursacht durch die Dirac-Impulse in vorherigen Zeitintervallen, multipliziert durch die Rauschamplituden  $q_i$ .

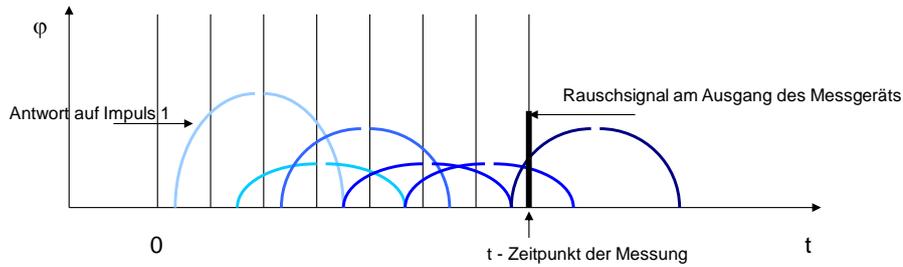


Abbildung 4: Rauschsignal am Ausgang des Messgeräts im Moment t.

Das gilt, wenn die Zeitintervalle  $\Delta t$  viel kleiner als jede Zeitkonstante im System sind.

$$\varphi(t) = \sum_{t_i=-\infty}^t q_i P(t, t_i) \quad (1)$$

$P(t, t_i)$  ist die Impulsantwort im Moment t auf einen Eingangsimpuls mit dem Integral 1 (Dirac-Impuls), der im Moment  $t_i$  entstanden ist.

Es gilt:

$$\varphi(t)^2 = \left( \sum_{t_i=-\infty}^t q_i P(t, t_i) \right)^2 = \sum_{t_i, t_j=-\infty}^t q_i q_j P(t, t_i) P(t, t_j) \quad (2)$$

Beachten wir das Folgende. Da wir am Eingang ein Zufallssignal haben, können wir den eigentlichen Wert  $\varphi(t)$  nicht berechnen. Wir werden stattdessen die folgende Varianz berechnen:

$$\langle \varphi(t)^2 \rangle_t$$

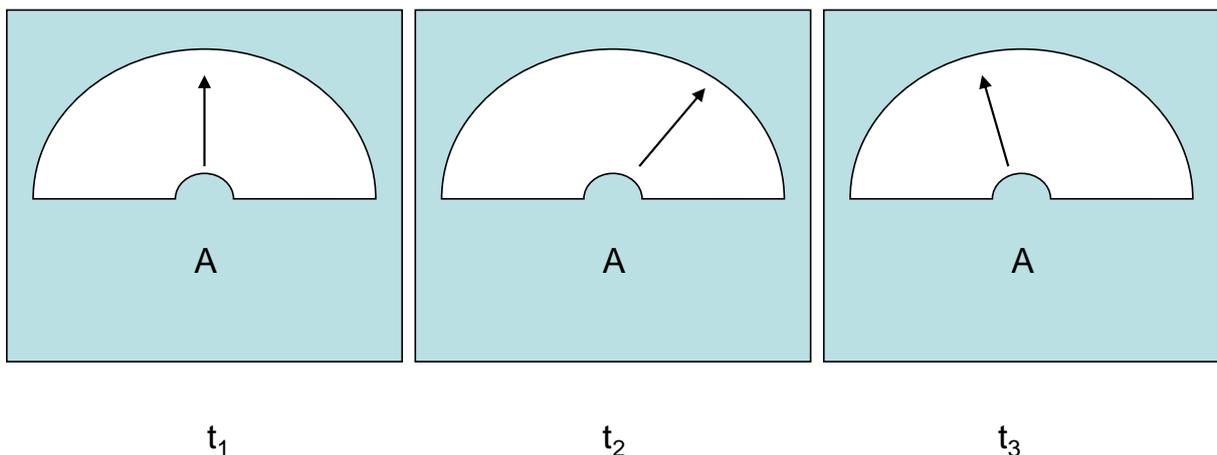


Abbildung 5: Ein Messgerät in verschiedenen Momenten

Es ist schwierig Mittelwerte in Zeitdomain zu rechnen. Wir machen deshalb folgende Annahme:

Es ist gleich ob wir Ausgang einer Schaltung (die sich zeitlich nicht verändert) in verschiedenen Momenten messen (Abbildung 5) und eine statistische Größe anhand dieser Samples rechnen

oder viele Kopien dieser Schaltung machen (oder sich viele Kopien vorstellen) (Abbildung 6) und in *einem Moment* den Ausgang jeder Schaltung messen und Statistik berechnen.

Das gilt für ergodische Systeme, die eine endliche *Korrelationszeit* haben, bzw. endliche Zeitkonstanten, so dass Rauschsignale im Zeitpunkt  $t$  unabhängig von Rauschsignalen im Zeitpunkt  $t - \tau$  sind, wenn  $\tau$  groß genug ist. Für diese Systeme ist die Autokorrelationsfunktion AKF gleich null

$$\text{AKF}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \varphi(t + \tau) dt \quad (3)$$

für  $\tau$  größer als die Zeitkonstanten im System.

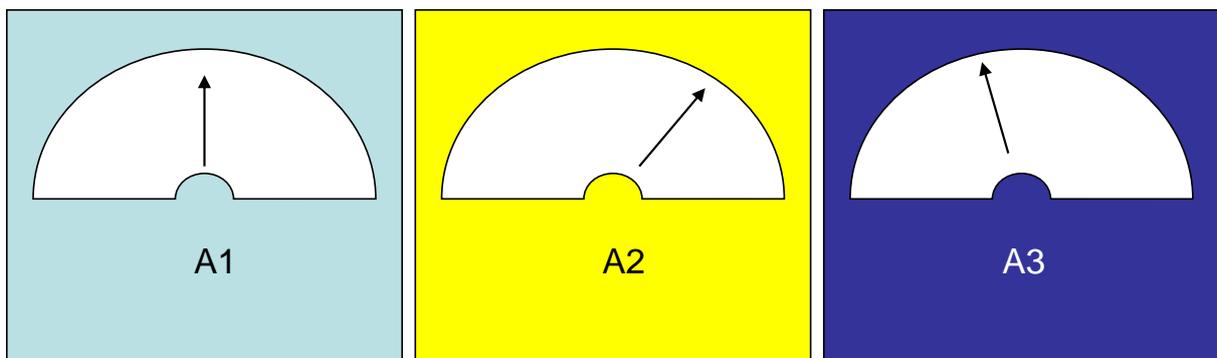


Abbildung 6: Mehrere Kopien des Messgeräts (Ensamble)

Im ersten Fall (Abbildung 5) haben wir Zeit-Statistik (z.B Zeitmittelwert). Im zweiten Fall (Abbildung 6) haben wir Scharstatistik oder Ensemblestatistik (Ensemblemittelwert).

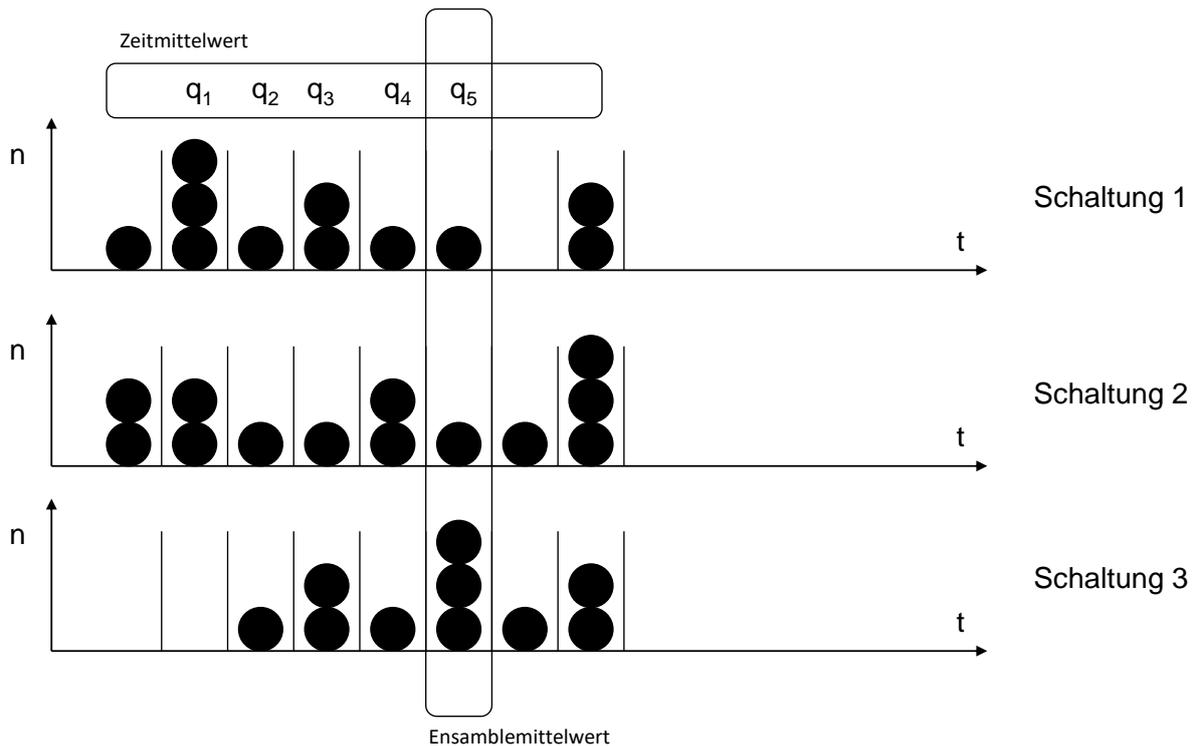


Abbildung 7: Zeitmittelwert und Ensemble-Mittelwert

Es gilt:

$$\langle \varphi(t)^2 \rangle_t = \langle \varphi(t)^2 \rangle_e \quad (4)$$

Zeit-Mittelwert ist gleich dem Ensemblemittelwert (Abbildung 7).

Wenn man (2) in (4) einsetzt, bekommt man:

$$\langle \varphi(t)^2 \rangle_e = \sum_{t_i, t_j = -\infty}^t \langle q_i q_j \rangle_e P(t, t_i) P(t, t_j) \quad (5)$$

Beachten wir: die Summe verläuft über die Zeit und der Mittelwert verläuft über verschiedene Kopien der Schaltung. Für jedes Produkt  $q_i q_j$  gibt es einen Ensemblemittelwert.

Es gilt das Folgende:

Fall 1: Für verschiedene  $i$  und  $j$  ( $i \neq j$ ) kann das Produkt von Rauschamplituden  $q_i q_j$  mit gleicher Wahrscheinlichkeit positiv oder negativ sein. Deswegen ist der Mittelwert  $\langle q_i q_j \rangle = 0$  für  $i \neq j$ .

Fall 2: Für  $i = j$  ist  $q_i q_j = q_i^2$  positiv.  $\langle q_i^2 \rangle$  ist ungleich null.  $\langle q_i^2 \rangle$  ist die Varianz von  $q_i$ .

Es gilt dementsprechend:

$$\langle q_i q_j \rangle_e = \langle q^2 \rangle_e \delta_{ij} \quad (6)$$

Das vereinfacht die Gleichung (5)

$$\langle \varphi(t)^2 \rangle_e = \sum_{t_i=-\infty}^t \langle q^2 \rangle_e (P(t, t_i))^2 \quad (7)$$

Die Summe in (7) kann auch als Integral dargestellt werden.

Die Varianz vom Rauschsignal am Ausgang im Zeitpunkt t ist:

$$\langle \varphi(t)^2 \rangle_e = \int_{-\infty}^t \frac{\langle q^2 \rangle_e}{\Delta t} (P(t, \tau))^2 d\tau \quad (8)$$

$\Delta t$  ist die Länge der Zeitintervalle.

$P(t, \tau)$  ist die Impulsantwort im Moment t auf ein Eingangsimpuls mit dem Integral 1 (Dirac-Impulse), der im Moment  $\tau$  entstanden ist:  $\delta(t - \tau)$ .

Größe  $q_i$  ist die Rauschamplitude am Eingang im Intervall  $\Delta t$ , mit der Standardabweichung  $\langle q_i^2 \rangle$ .

(8) ist die Formel für die Varianz des Rauschsignals im Zeitdomain.

### Beispiel 1: Leckstromrauschen einer Fotodiode

Wir werden nun folgende Schaltung berechnen:

Eine Fotodiode (Abbildung 8) verwendet einen in Sperrrichtung gepolten PN Übergang (eine Diode) um Licht zu detektieren. Durch die Sperrspannung wird die Verarmungszone vergrößert, das E-Feld verstärkt und die Ladungssammlung effizienter gemacht.

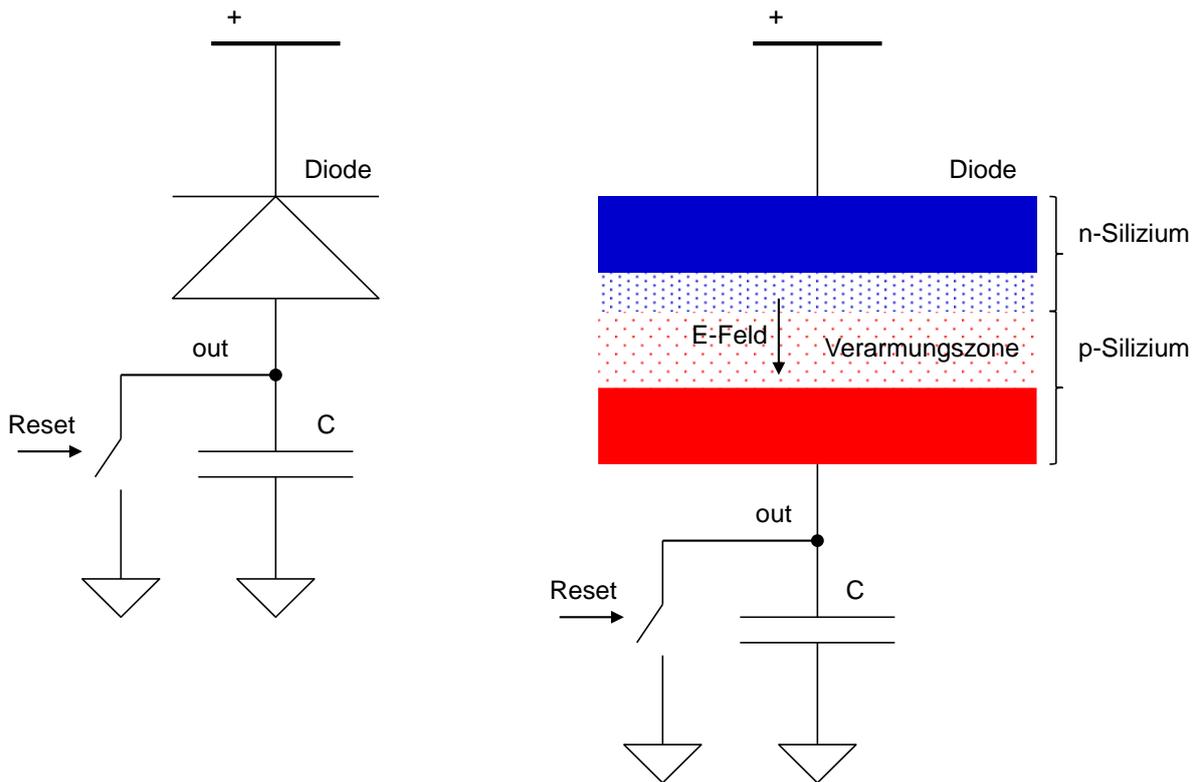


Abbildung 8: Fotodiode

Wenn ein Photon in Silizium absorbiert wird, Abbildung 9 – (a), und wenn seine Energie größer als 1.1 eV ist (Silizium-Bandlücke) kann ein Elektron von Valenz- in Leitungsband angehoben werden (b). Auf diese Weise entsteht ein Elektron-Loch paar. Wenn das in der Verarmungszone geschieht, wo das E-Feld stark ist, wird das Elektron zum N-Teil angezogen (c). Das Loch wird zum P-Bereich angezogen, bzw. ein Elektron bewegt sich durch das Valenzband und füllt das Loch (d). Auf diese Weise entsteht ein Fotostrom.

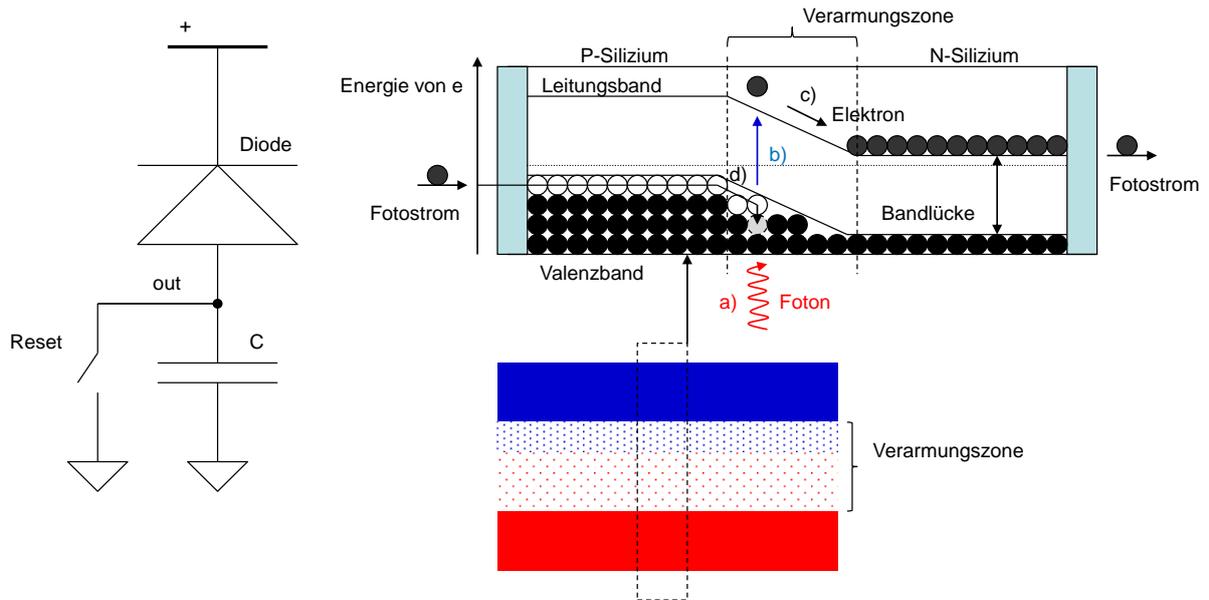


Abbildung 9: Entstehung vom Fotostrom

Ein Pixelsensor (Abbildung 10) besteht aus einer Matrix solcher Fotodioden. Ein Pixel enthält die Fotodiode, einen Verstärker A um Dioden-Spannung zu messen, einen Reset-Schalter (S1) und einen Select-Schalter S2. Alle Pixel einer Spalte teilen sich die Ausleseleitung. Alle Pixel einer Zeile teilen sich die Select- und Reset-Leitungen.

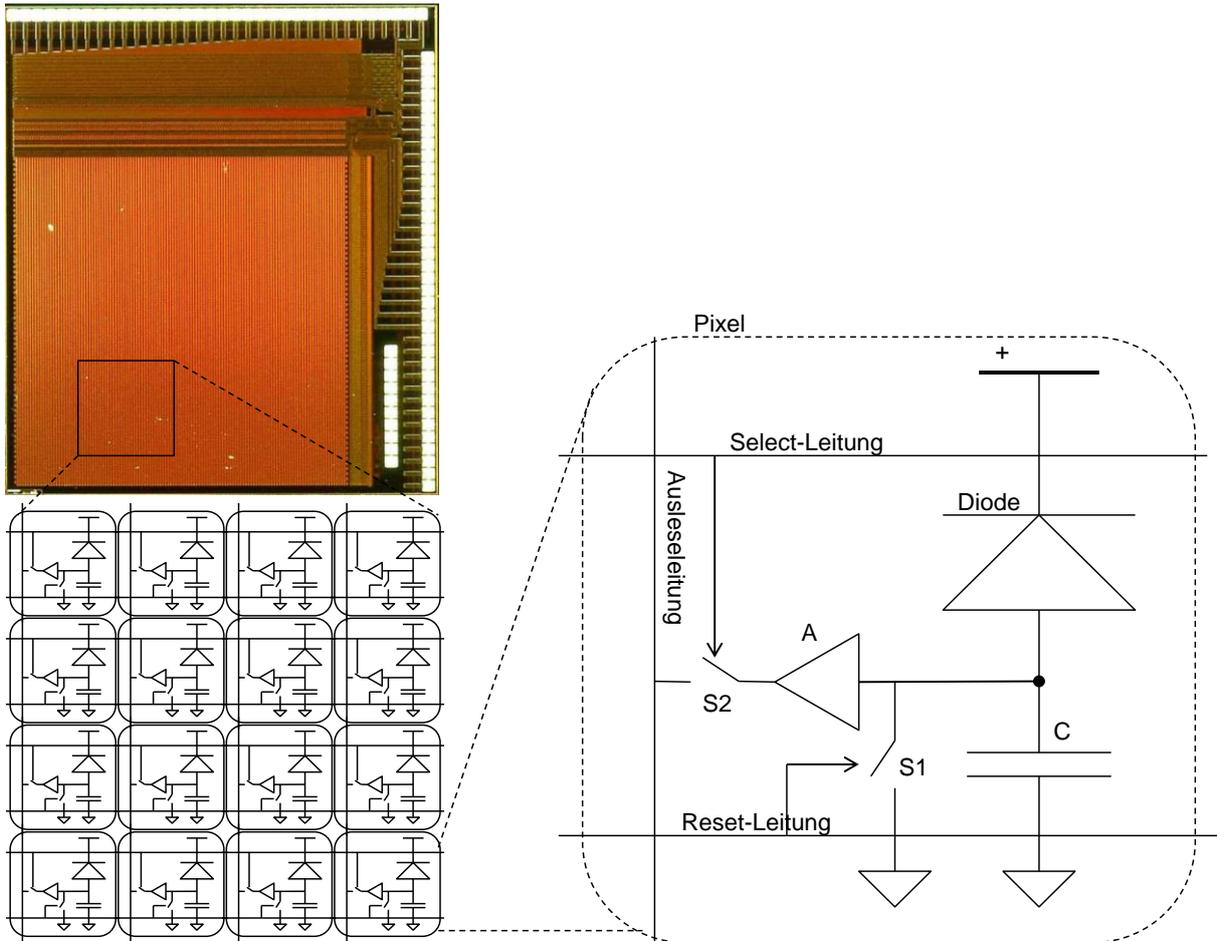


Abbildung 10: Pixelmatrix und Block-Schaltplan eines Pixels

Die Ausleseschaltung kann man sich als einen Kondensator C vorstellen (Abbildung 11). Er ist an die Diode angeschlossen. Der Kondensator wird mithilfe eines Schalters (ein MOSFET) entladen (Reset-Phase). Der Diodenstrom (Fotostrom  $i_{\text{signal}}$ ) fließt in den Kondensator C für eine bestimmte Integrationszeit (Belichtungszeit). Nach der Belichtungszeit  $T_{\text{exp}}$  wird die Spannung am Kondensator gemessen. Die Spannung wird größer, wenn das Licht stärker ist, da die Zahl von absorbierten Photonen und der Fotostrom größer sind.

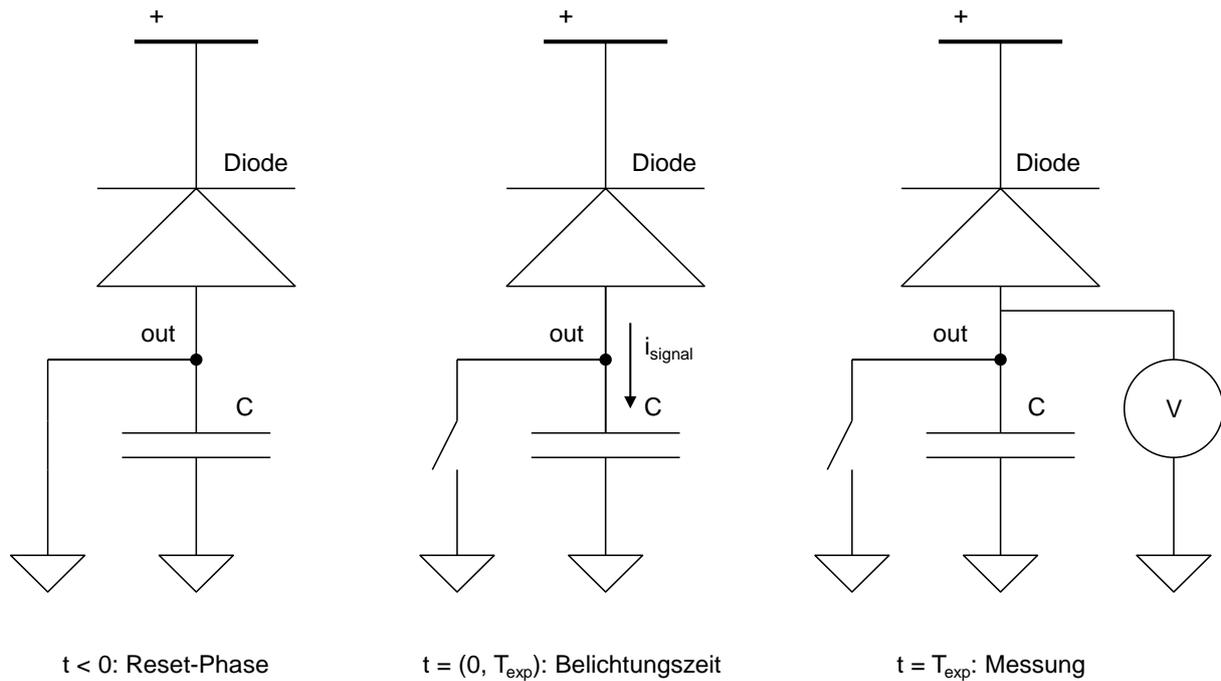


Abbildung 11: Eine Pixel-Schaltung (Fotodiode) in drei Phasen

In einer Diode, die in Sperrrichtung gepolt ist, fließt auch ein Strom ohne Licht (Dunkelstrom). Es ist ein sogenannter Temperatur-Leckstrom, verursacht durch die Elektronenlochpaare, die durch thermische Generation entstehen (Abbildung 12). Den Mechanismus kann man sich wie folgend vorstellen: Temperatur führt zu Schwingungen in Kristallgitter. Das Quantum dieser Schwingungen nennen wir Phonon. Ein Phonon kann seine Energie auf ein Valenzelektron übertragen und ein Elektron-Loch Paar erzeugen. Auf diese Weise entsteht der Leckstrom.

Dieser Leckstrom führt zum Offset in der Messung. Der Offset wäre unproblematisch, wenn er konstant wäre. Der Offset könnte ohne Licht gemessen und später von der Messung mit Licht abgezogen werden. Der Leckstrom ist leider rauschbehaftet, weil die thermische Generation (Absorption von Phononen) ein stochastischer Prozess ist. Das Leckstromrauschen dazu führt, dass der Offset bei verschiedenen Messungen (Zeitstatistik) oder in verschiedenen Pixeln (Ensamble-Statistik) verschieden ist. Es entsteht dadurch ein Rauschen im Bild. Wir werden nun dieses Rauschen quantisieren, bzw. die Varianz der Spannung am Kondensator berechnen.

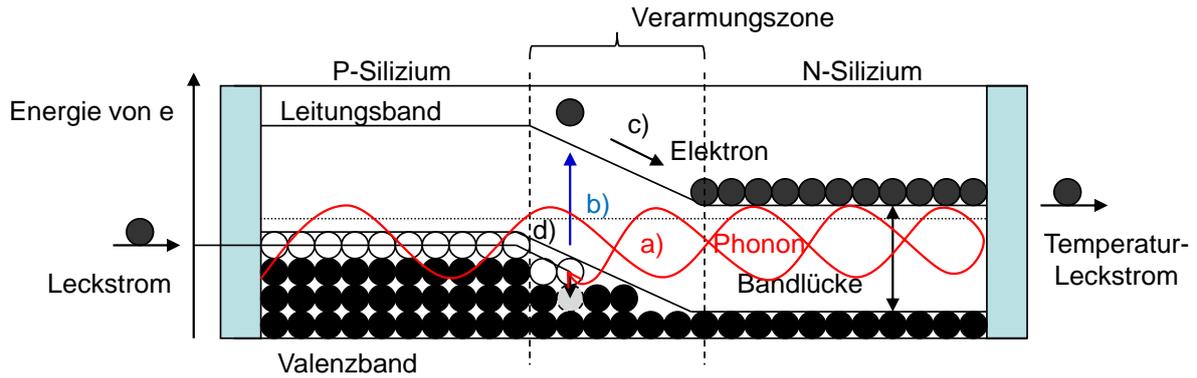


Abbildung 12: Temperatur führt zu Schwingungen in Kristallgitter. Das Quantum dieser Schwingungen nennen wir Phonon. Ein Phonon kann ebenfalls ein Elektron-Loch Paar erzeugen. Auf diese Weise entsteht ein Leckstrom.

Wir werden die Formel für das Rauschsignal im Zeitdomain (8) benutzen. In unserem System hat der Kondensator die Rolle des Messgeräts. Das Eingangssignal ist der Leckstrom.

Für die Formel (8) brauchen wir  $\langle q^2 \rangle$  und die Impulsantwort.

### Varianz der Rauschamplitude

Wie groß ist die Varianz von Rauschamplitude  $\langle q^2 \rangle$ ?

Die Einheit von  $q$  ist Coulomb.  $Q_i$  ist die Ladung, die in der Diode im Zeitintervall  $\Delta t$  entsteht (Abbildung 13).

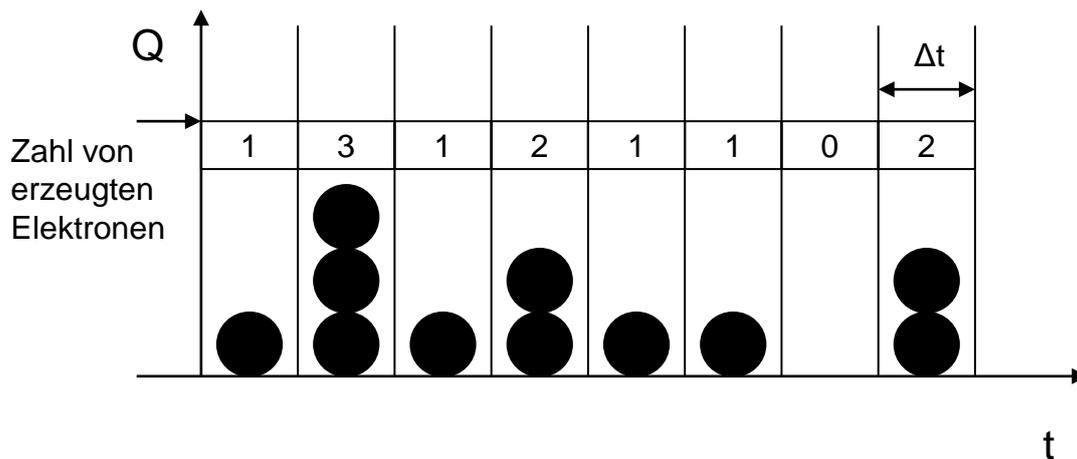


Abbildung 13: Die Zahl von thermisch-generierten Elektronen in  $\Delta t$  ist eine Zufallsvariable

Die Ladung entsteht durch die Generationen von Elektronenlochpaaren. Die einzelnen Generationen sind unabhängig. Die Zahl von in einem Zeitintervall generierten Elektronen ist

ein Zufallswert. Aus diesen Gründen (Unabhängigkeit der Ereignisse und zufällige Zeit) ist die Zahl der generierten Elektronen in  $\Delta t$  Poisson-verteilt.

Poisson-Verteilung ist durch folgende Formel definiert:

$$P_{\lambda}(x = n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \quad (9)$$

$P$  ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Zufallsvariable  $x$  den Wert  $n$  nimmt. Konstante  $\lambda$  ist der Mittelwert von  $x$ . Abbildung 12 zeigt die Poisson-Verteilung als Graph.

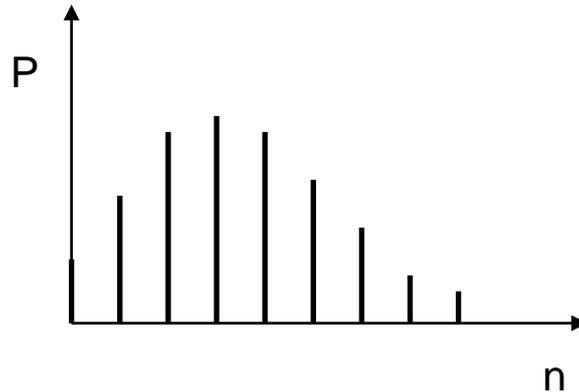


Abbildung 14: Poisson-Verteilung.  $P$  ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Zufallsvariable  $x$  den Wert  $n$  nimmt. Konstante  $\lambda$  ist der Mittelwert von  $x$ .

Poisson-Verteilung ist für die Rauschen-Theorie wichtig. Poisson-Verteilung ist die Standardverteilung für ganzzahlige Zufallsvariablen, genauso wie die Gaußverteilung die Standardverteilung für reelle Zufallsvariablen ist.

Poisson Verteilung hat die Eigenschaft, dass die Varianz (Quadrat der Standardabweichung) gleich wie der Erwartungswert (Mittelwert) ist.

Poisson Verteilung ist ein gutes Modell für die Ereignisse, die bei konstanter mittlerer Rate unabhängig voneinander in einem festen Zeitintervall oder räumlichen Gebiet eintreten.

Nehmen wir als Beispiel eine in Sperrrichtung gepolte PN Diode. Der Leckstrom wird durch thermische Generation von Elektron-Loch Paaren erzeugt. Die Zahl von generierten Elektronen ist ein Zufallswert, der nach Poisson verteilt ist.

Deswegen, es gilt:

$$\langle q^2 \rangle_e = \langle q^2 \rangle_t = e e \langle n^2 \rangle_t = e e \langle n \rangle_t = eI\Delta t \quad (10)$$

### Impulsantwort

Leiten wir nun die Impulsantwort  $P(t = T_{\text{exp}}, \tau)$  her.

$P(t, \tau)$  ist die Impulsantwort im Moment  $t$  auf einen Eingangsimpuls mit dem Integral 1, der im Moment  $\tau$  geschehen ist.

Wenn ein Ladungsimpuls  $1C \times \delta(t - \tau)$  in den Kondensator während der Zeit  $\tau = (0, T_{\text{exp}})$  passiert, messen wir die Kondensatorspannung  $1/C \times \text{Coulomb}$  im Moment  $T_{\text{exp}}$  (Abbildung 15 - B). Wenn ein Ladungsimpuls  $1C \times \delta(t - \tau)$  früher passiert ( $\tau < 0$ ) (Abbildung 15 - A) messen wir die Spannung 0, da der Reset-Schalter für  $t < 0$  zu ist. Auch für Ladungsimpulse  $1C \times \delta(t - \tau)$  bei  $\tau > T_{\text{exp}}$  messen wir die Spannung 0 im  $t = T_{\text{exp}}$  (Abbildung 15 - C).

Deswegen ist die Impulsantwort  $P(T_{\text{exp}}, \tau) = 1/C$  für  $\tau$  zwischen 0 und  $T$ , ansonsten  $P = 0$  (Abbildung 15, oben):

$$P(T_{\text{exp}}, \tau) = \frac{1}{C}; \tau \in (0, T_{\text{exp}}) \quad (11)$$

$$P(T_{\text{exp}}, \tau) = 0; \tau < 0, \tau > T_{\text{exp}}$$

Beachten wir, dass die Impulsantwort keine Coulomb Einheit hat, da eine Impulsantwort Antwort auf einen Dirac-Impuls mit Dimension 1 ist. Erst wenn wir Impulsantwort mit Amplitude  $q$  multiplizieren, bekommen wir eine Ausgangsspannung.

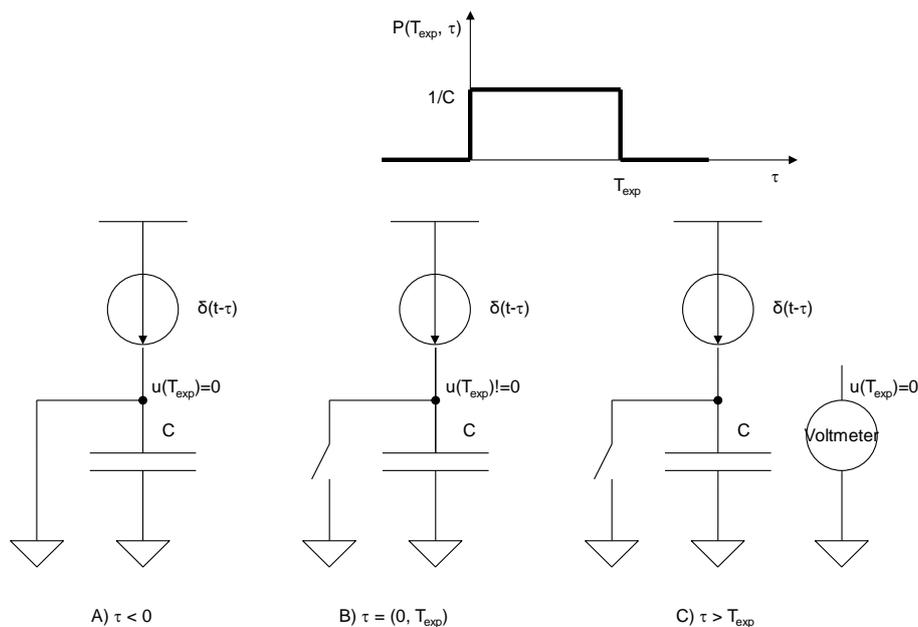


Abbildung 15: Herleitung der Impulsantwort  $P(T_{\text{exp}}, \tau)$ . Antwort auf einen Impuls

Zusammenfassung:

Varianz des Rauschsignals:

$$\langle \varphi(t)^2 \rangle_e = \int_{-\infty}^t \frac{\langle q^2 \rangle_e}{\Delta t} (P(t, \tau))^2 d\tau$$

Varianz der Rauschamplitude:

$$\langle q^2 \rangle_e = eI\Delta t$$

Impulsantwort:

$$P(T_{\text{exp}}, \tau) = \frac{1}{C}; \tau \in (0, T_{\text{exp}})$$

$$P(T_{\text{exp}}, \tau) = 0; \tau < 0, \tau > T_{\text{exp}}$$

Wenn wir die Formeln für die Varianz der Rauschamplitude (10) und Impulsantwort (11) in (8) einsetzen, bekommen wir:

$$\langle u_{\text{out}}(T_{\text{exp}})^2 \rangle = \int_{-\infty}^T eI \left( P(T_{\text{exp}}, \tau) \right)^2 d\tau = \int_0^{T_{\text{exp}}} \frac{eI}{C^2} d\tau = \frac{eIT_{\text{exp}}}{C^2} \quad (12)$$

Die Varianz der gemessenen Spannung im Moment  $T_{\text{exp}}$  ist proportional zur Ladung, die sich durch den Leckstrom  $I$  auf dem Kondensator innerhalb der Messzeit  $T_{\text{exp}}$  ansammelt ( $Q = IT_{\text{exp}}$ ).

## Diskussion

Rauschen allein sagt uns wenig über Qualität der Messung. Erst wenn wir die Signalamplitude kennen, wissen wir, ob das Rauschen groß oder klein ist.

Signal an der Fotodiode ist:

$$U_{\text{sig}} = \frac{I_{\text{sig}} T_{\text{exp}}}{C} \quad (13)$$

$I_{\text{sig}}$  ist der Fotostrom.

Eine nützliche Größe ist Signal zu Rauschen Verhältnis. (Signal to noise ratio - SNR)

SNR definiert man entweder als Signalleistung durch Rauschleistung oder als Signalamplitude (z.b. in Volt) durch Standardabweichung des Rauschens (in V). Auf English schreibt man root mean square (RMS) für Standardabweichung. Wir werden die Spannung  $U_{\text{sig}}$  mit der Standardabweichung (Quadratwurzel der Varianz) des Rauschens teilen.

$$\text{SNR} = \frac{\frac{I_{\text{sig}} T_{\text{exp}}}{C}}{\sqrt{\frac{eIT_{\text{exp}}}{C^2}}} = \frac{I_{\text{sig}} \sqrt{T_{\text{exp}}}}{\sqrt{eI}} \quad (14)$$

Wie kann man SNR der Fotodiode erhöhen?

- 1) Indem wir Leckstrom  $I$  verringern. Der Leckstrom ist temperaturabhängig.
- 2) Indem wir die Messzeit  $T_{\text{exp}}$  verlängern.

Sind kleinen Pixels rauschärmer? Kleinere Pixel haben zwar einen kleineren Leckstrom (kleineren RMS-Wert vom Rauschsignal) aber auch einen kleineren Signalstrom. Da im Nenner

von (14) Quadratwurzel vom Leckstrom steht, und im Zähler der Signalstrom, haben kleineren Pixels schlechteres SNR, trotz des niedrigeren Rauschpegels.

## Rauschen im Frequenzbereich

Die Formel für das Rauschen im Zeitdomain (8) ist für die Systeme geeignet, die sich zeitlich verändern. Da sind z.B. die Schaltungen die Schalter enthalten. Wenn ein System für längere Zeit<sup>1</sup> unverändert bleibt, ist eine Formel im Frequenzdomain einfacher zu verwenden, da man statt der Impulsantwort die Übertragungsfunktion benutzt. Wir werden nun die Formel für die Varianz des Rauschsignals am Ausgang im Frequenzdomain herleiten.

Wenn das System stationär ist, gilt das folgende für die Impulsantwort  $P(t, \tau)$ :

$P(t, \tau)$  ist die Impulsantwort im Moment  $t$  auf den Dirac-Impuls  $\delta(t - \tau)$

$$P(t, \tau) = P(t - \tau, 0) \equiv P(t - \tau) \quad (15)$$

$P$  ist die Antwort auf den Dirac-Impuls  $\delta(t)$ .

Fangen wir von der Gleichung (8) an:

$$\langle \varphi(t)^2 \rangle_e = \int_{-\infty}^t \frac{\langle q^2 \rangle_e}{\Delta t} (P(t, \tau))^2 d\tau$$

Wenn wir (15) in (8) einsetzen, bekommen wir:

$$\langle \varphi(t)^2 \rangle_e = \int_{-\infty}^t \frac{\langle q^2 \rangle_e}{\Delta t} (P(t - \tau))^2 d\tau = \int_0^{\infty} \frac{\langle q^2 \rangle_e}{\Delta t} (P(u))^2 du = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\langle q^2 \rangle_e}{\Delta t} (P(u))^2 du \quad (16)$$

Wir haben im letzten Schritt  $P(u) = 0$ , für  $u < 0$  berücksichtigt.

Es gilt auch ([https://de.wikipedia.org/wiki/Parsevalsche\\_Gleichung](https://de.wikipedia.org/wiki/Parsevalsche_Gleichung)):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\langle q^2 \rangle_e}{\Delta t} (P(t))^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\langle q^2 \rangle_e}{\Delta t} |P(i\omega)|^2 d\omega \quad (17)$$

$P(i\omega)$  ist die Fourier-Transformation der Impulsantwort. Man kann zeigen, dass  $P(i\omega)$  gleich der Übertragungsfunktion  $H(i\omega)$  ist:

$$P(i\omega) = H(i\omega) = \frac{V_{out}(i\omega)}{V_{in}(i\omega)} \quad (18)$$

die wir herleiten können, indem wir die lineare Schaltung mit den komplexen Impedanzen lösen.

Betrachten wir die Formel (17) allgemeiner:

<sup>1</sup> Längere Zeit bedeutet hier länger als die Zeitkonstanten.

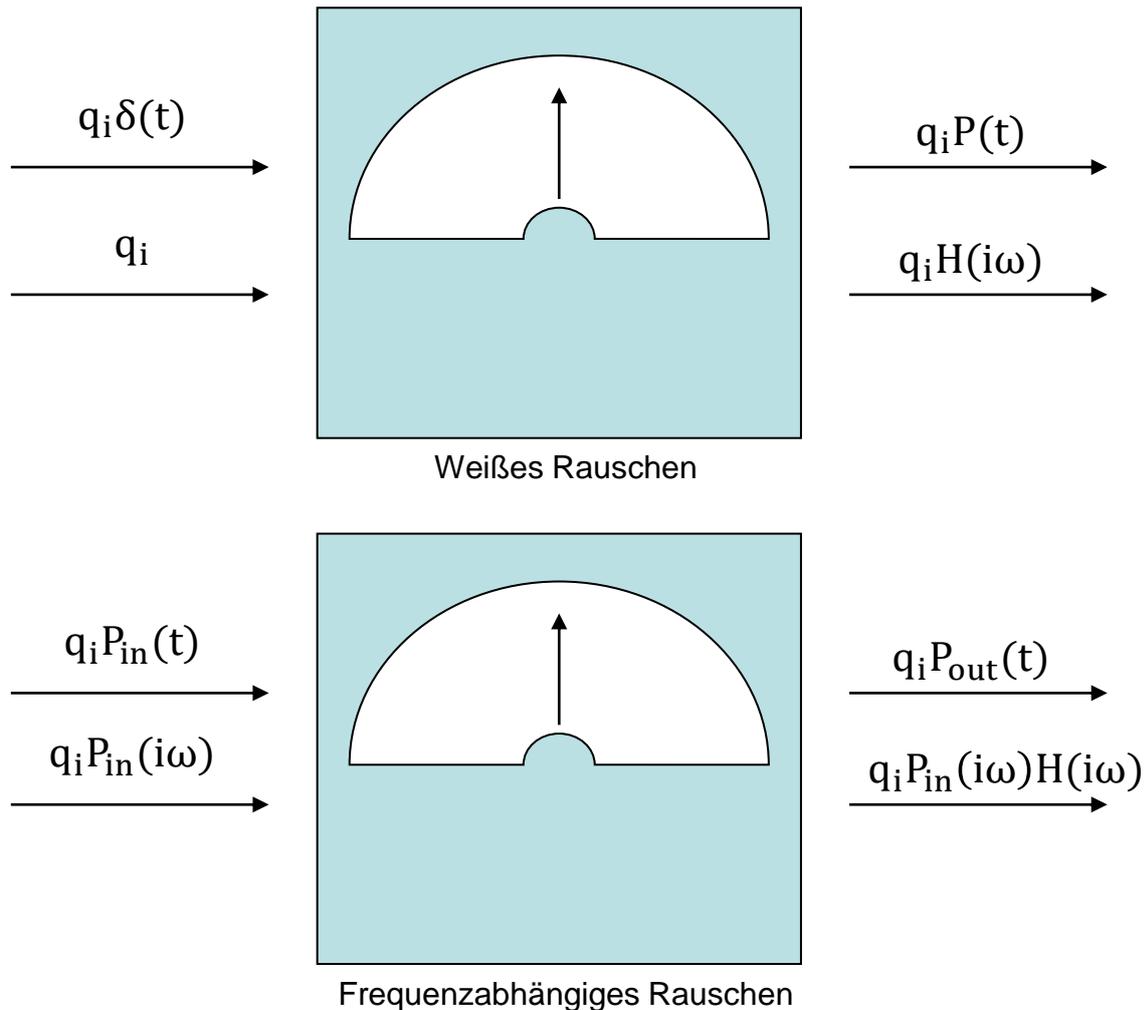


Abbildung 16: Messgerät mit Übertragungsfunktion  $H(i\omega)$

Unser Messgerät empfängt am Eingangs-Rauschimpulse und gibt am Ausgang die Rauschimpuls-Antworten (Abbildung 16).

Wir haben angenommen, dass die Eingangsimpulse (Rauschimpulse) die Form von Dirac-Impulsen haben, welche mit voneinander unabhängigen Amplituden  $q_i$  multipliziert sind (Abbildung 16 oben).

Das ist richtig, wenn es sich um **weißes Rauschen** handelt. Wir nennen das Rauschen weiß, dass die Fourier-Transformation von den Eingangsimpulsen (Dirac-Impulsen) eine konstante Funktion ist. Das Rauschen am Eingang enthält alle Frequenzen, wie die weiße Farbe, alle Wellenlängen enthält.

Es gibt auch Rauscharten wo die Rauschimpulse länger als  $\Delta t$  dauern und einen Zeitverlauf  $q_i \times P_{in}(t)$  haben. In dem Fall müsste man statt Impulsantwort die Antwort auf  $P_{in}(t)$  nehmen ( $P_{out}$ ) wenn man Rauschsignal am Ausgang herleitet (Abbildung 16 unten).

Die Fourier Transformation  $P_{out}(i\omega)$  ist das Produkt von Transformationen vom Rauschimpuls  $P_{in}(i\omega)$  und der Fourier-Transformation von Impulsantwort  $H(i\omega)$ . Wenn die Impulse  $P_{in}(t)$  kurz sind (Dirac-Impulse sind), gilt  $P(i\omega) = 1$ .

Die Varianz des Rauschsignals am Ausgang in einem stationären System ist:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\langle q^2 \rangle_e}{\Delta t} |P_{in}(i\omega)|^2 |H(i\omega)|^2 d\omega \quad (19)$$

Wir definieren hier die spektrale Leistungsdichte der Rauschquelle:

$$S(f) = 2 \frac{\langle q^2 \rangle}{\Delta t} |P_{in}(i\omega)|^2 \quad (20)$$

Wenn wir (20) in (19) einsetzen, bekommen wir:

$$\langle \varphi^2 \rangle = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(f) |H(i\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} S(f) |H(i\omega)|^2 df = \int_0^{\infty} S(f) |H(i\omega)|^2 df \quad (21)$$

Das ist die Formel für die Varianz des Rauschsignals in Frequenzdomain.

Diese Varianz ist gleich dem quadratischen Mittelwert in Zeit (mean square (MS-) Wert).

Ein weiterer Name für die Größe  $\langle \varphi^2 \rangle$  ist Rauschleistung.

$H(i\omega)$  ist die Übertragungsfunktion der Schaltung und  $S(f)$  die spektrale Leistungsdichte definiert durch (20).

Wie erwähnt, wenn wir annehmen, dass die Eingangsimpulse sehr kurz sind und dass die Approximation  $P_{in}(i\omega) = 1$  gilt, handelt sich um weißes Rauschen.

Das Leckstromrauschen ist weißes Rauschen, wenn relativ viele Elektronen innerhalb eines Zeitintervalls kleiner als jede Zeitkonstante generiert werden.

Es gibt auch Arten von Rauschen wo  $P_{in}(i\omega) \neq 1$  ist.

Ein Beispiel ist 1/f Rauschen (Flicker Rauschen).

Für 1/f rauschen gilt  $P_{in}(i\omega) \sim 1 / \omega$ .

### Wie messen wir das Rauschsignal?

Wir haben bei der Herleitung Ensemble-Mittelwert (Scharmittelwert) benutzt. In Wirklichkeit haben wir mehrere Kopien der Schaltung nicht. Wir können aber die Messung an einem System wiederholen. Wenn die Zeit zwischen den Messungen viel länger als die Zeitkonstanten ist, weisen die Messungen keine Korrelation auf. Dann ist der Mittelwert basierend auf diesen Messungen gleich wie Scharmittelwert.

Das bedeutet: wir können einen Digital-Oszilloskop verwenden und eine RMS Messfunktion benutzen um  $\langle \varphi^2 \rangle$  zu messen. Diese Funktion misst  $\varphi(t)$  kontinuierlich und rechnet Mittelwert des Quadrats in Zeit.  $\varphi(t)$  ist das „Kleinsignal“, also DC wert muss abgezogen werden. Wichtig ist es hier, dass die Messung lange genug dauert.

Wir können auch mehrere Samples von  $\varphi$  nehmen, z.B., mit dem Oszilloskop in verschiedenen Momenten  $t_1, t_2, \dots$  die Amplituden  $\varphi(t_1), \varphi(t_2)$  auslesen und dann die Varianz berechnen. In

beiden Fällen bekommen wir das gleiche Ergebnis, wenn die Zahl von Samples und die Mußzeit groß sind.

### Leckstromrauschen im Frequenzbereich

Beispiel: Wie groß ist die spektrale Leistungsdichte  $S(f)$  im Fall vom Leckstromrauschen?

Die spektrale Leistungsdichte  $S(f)$  haben wir wie folgend definiert (20):

$$S(f) = 2 \frac{\langle q^2 \rangle}{\Delta t} |P_{in}(i\omega)|^2$$

Laut Formel (10) gilt:

$$\langle q^2 \rangle_e = eI\Delta t \quad (22)$$

Für weißes Rauschen  $P_{in}(i\omega) = 1$ .

Wenn wir (22) in (20) einsetzen, bekommen wir die spektrale Leistungsdichte für das Leckstromrauschen:

$$S(f) = 2eI \quad (23)$$

Ein weiterer Name für diese Rauschart ist das Schrotrauschen (shot noise). Dieser Name kommt von der Analogie zwischen dem Fluss von Elektronen und den Schrotkugeln, die sich in einem Turm im freien Fall bilden. <https://de.wikipedia.org/wiki/Schrotturn>. Schrotrauschen (auch Poissonsches Schrotrauschen oder Schottky-Rauschen) ist in der Optik und der Elektronik eine Form des weißen Rauschens, welche durch einen Poissonprozess modelliert werden kann.

## Thermisches Rauschen im Frequenzbereich

Wie groß ist die spektrale Leistungsdichte für das thermische Rauschen eines Widerstandes?

Im Widerstand haben wir keine Generation von Elektronen und es ist zunächst unklar, ob wir die Formel (23) benutzen dürfen.

Wenn wir den mittleren Drift-Strom, der durch einen Widerstand fließt ( $U/R$ ) in die Formel (23) einsetzen, bekommen wir viel zu große Leistungsdichte.

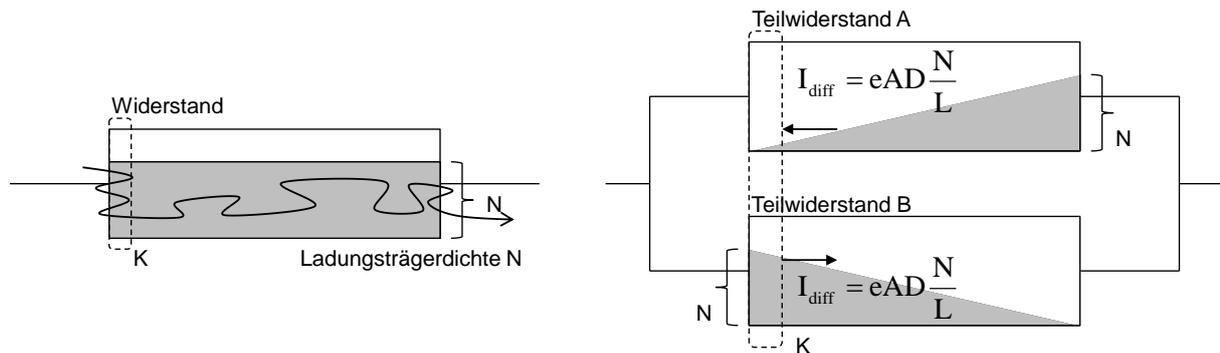


Abbildung 17: Thermisches Rauschen in einem Widerstand

Wir können sich aber folgendes vorstellen: Die Elektronen bewegen sich im Widerstand nicht nur wegen des Feldes (Drift-Strom) sondern auch weil sie kinetische (thermische) Energie haben. Dieser thermische Strom führt zur Rauschamplitude  $q$ . Diese Amplitude ist die Ladungsmenge  $q$  innerhalb einer Kontur  $K$  (Abbildung 17).

Wie groß sind die Varianz von  $q$  und der thermische Strom? Wir können den Widerstand als Parallelschaltung von zwei Teilwiderständen A und B darstellen (Abbildung 17, rechts). Die zwei Teilwiderstände haben die gleichen Längen und die gleichmäßig steigenden und fallenden Ladungsträgerdichten von 0 bis  $N$  (A) und von  $N$  bis 0 (B).  $N$  ist die Ladungsträgerdichte des Originalwiderstands. Der Gesamtwiderstand der Parallelschaltung ist auch  $R$ , also wir dürfen solche Zerlegung machen.

Gradient der Dichte führt zum folgenden Diffusionsstrom:

$$I_{\text{diff}} = eAD \frac{N}{L} \quad (24)$$

$A$  und  $L$  sind der Querschnitt und die Länge des Widerstands,  $D$  Diffusionskonstante und  $e$  die Elementarladung.

Der Widerstand A transportiert innerhalb der Zeit  $\Delta t$  die Ladungsmenge  $q_A$  in die Kontur  $K$ , der Widerstand 2 die Ladungsmenge  $q_B$  aus der Kontur  $K$ . Es gilt für die Ladung in Kontur. Deswegen:

$$q = q_A + q_B.$$

Die Ladungen  $q_A$  und  $q_B$  sind Zufallsgrößen mit demselben Mittelwert:

$$\langle q_A \rangle_e = \langle q_B \rangle_e = I_{\text{diff}} \Delta t$$

Für die Varianzen gilt:

$$\langle q^2 \rangle_e = \langle q_A^2 \rangle_e + \langle q_B^2 \rangle_e \quad (25)$$

Für jede Varianz gilt die Gleichung (22):

$$\langle q_A^2 \rangle_e = \langle q_B^2 \rangle_e = e I_{\text{diff}} \Delta t \quad (26)$$

Wenn man (25) und (26) in (20) einsetzt bekommt man die spektrale Leistungsdichte:

$$S(f) = 2 \frac{\langle q^2 \rangle}{\Delta t} |P_{\text{in}}(i\omega)|^2 = 2 \frac{\langle q_A^2 \rangle + \langle q_B^2 \rangle}{\Delta t} = 4e I_{\text{diff}} \Delta t \quad (27)$$

Wenn wir (24) in (27) einsetzen, bekommen wir:

$$S_R(f) = 2S_{R1}(f) = 4e^2 A D \frac{N}{L} \quad (28)$$

Versuchen wir nun die spektrale Leistungsdichte (29) als Funktion von R darzustellen:

Der Widerstand wird durch die folgende Formel beschrieben:

$$\frac{1}{R} = e \mu N \frac{A}{L} \quad (29)$$

$\mu$  ist die Beweglichkeit der Ladungsträger (Mobilität der Ladungsträger).

Für die Beweglichkeit und Diffusionskonstante gilt die Einstein-Gleichung:

$$\frac{D}{\mu} = \frac{kT}{e} \quad (30)$$

K ist die Boltzmann-Konstante und T ist Temperatur.

Wenn man (30) und (29) in (28) einsetzt, bekommt man die spektrale Leistungsdichte für thermisches Stromrauschen in einem Widerstand:

$$S_{\text{IR}}(f) = 4kT/R \quad (31)$$

Das Rauschen eines Widerstands kann mit einer Stromquelle mit spektralen Leistungsdichte  $4kT/R$  beschrieben werden. Die Einheit von  $S_{\text{IR}}$  ist  $A^2/s$ .

Das thermische Rauschen nennt man auch Nyquist-Rauschen, Johnson-Rauschen oder Johnson-Nyquist-Rauschen.

Wir können die Stromquelle mit Parallelwiderstand in eine Spannungsquelle und Serienwiderstand umwandeln (Abbildung 18). Es gilt dann für die Spannung und Strom von den jeweiligen Quellen:

$$U = I \times R$$

Die Leistungsdichte der Spannungsquelle ist dann  $S_v = R^2 S_i$ .

Wie bekommen:

$$S_{VR}(f) = 4kTR \quad (32)$$

Das Rauschen eines Widerstands kann mit einer Spannungsquelle mit der spektralen Leistungsdichte  $4kTR$  beschrieben werden. Die Einheit von  $S_{VR}$  ist  $V^2/s$ .

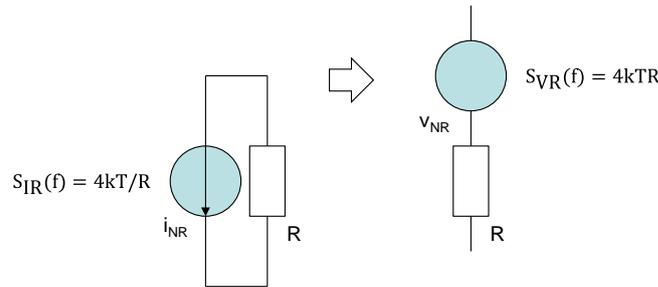


Abbildung 18: Rauschen eines Widerstands kann entweder mit Stromquelle oder mit Spannungsquelle modelliert werden.

### Beispiel: Reset Rauschen

Fotosensor mit der Kapazität  $C$  muss vor jeder Messung mit einem Schalter (Widerstand  $R$ ) entladen (resetet) werden (Abbildung 19). Widerstand  $R$  erzeugt am Kondensator  $C$  Spannungsrauschen. Wenn der Schalter geöffnet wird, bleibt ein Spannungsfehler am Kondensator. Varianz dieses Fehlers kann mithilfe von Formel (8) gerechnet werden. Wenn aber der Schalter für eine lange Zeit geschlossen war (deutlich länger als die Zeitkonstante  $RC$ ) kann auch die stationäre Formel (19) (die Formel für Varianz des Rauschsignals bzw. Rauschleistung im Frequenzdomain) verwendet werden.

$$\langle u^2 \rangle = \int_0^\infty S_{VR}(f) |H(i\omega)|^2 df \quad (33)$$

Die Übertragungsfunktion von RC-Schaltung ist:

$$H(i\omega) = \frac{v_{out}(i\omega)}{v_{nr}} = \frac{1}{1+i\omega RC} \quad (34)$$

Die spektrale Leistungsdichte ist (32):

$$S_{VR} = 4kTR \quad (35)$$

Wenn wir (35) und (34) in (33) einsetzen, bekommen wir:

$$\langle u^2 \rangle = \int_0^\infty 4kTR \left| \frac{1}{1+i\omega RC} \right|^2 df = \frac{4kTR}{2\pi} \frac{1}{RC} \tan^{-1}(\omega RC) \Big|_0^\infty = \frac{kT}{C} \quad (36)$$

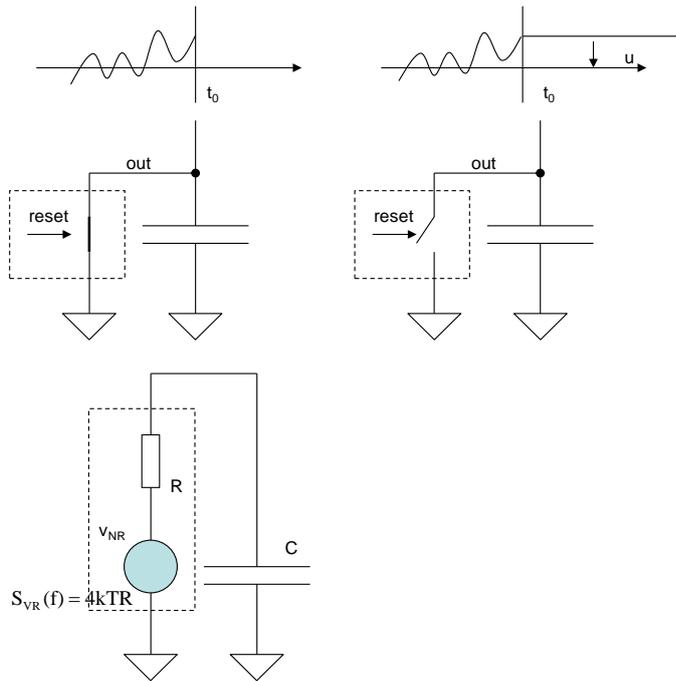


Abbildung 19: Berechnung vom Reset-Rauschen

Die Varianz vom Rauschsignal hängt nicht von R ab! Größere Widerstände erzeugen mehr Spannungsrauschen, aber führen auch zu längeren Zeitkonstanten und kleinerem Integral, so dass sich beide Einflüsse aufheben.

### Diskussion

In einem Pixelsensor haben wir also zwei Rauschquellen:

Leckstrom:

$$\langle u^2 \rangle = \frac{eIT_{\text{exp}}}{C^2} \quad (37)$$

$T_{\text{exp}}$  ist die Belichtungszeit, C Sensorkapazität, I Leckstrom und e elementare Ladung.

Reset-Schalter

$$\langle u^2 \rangle = \frac{kT}{C} \quad (38)$$

K ist die Boltzmann-Konstante und T ist Temperatur.