

## Zusätzliche Vorlesung 15

Die Themen dieser Vorlesung sind:

- Rauschen des MOS-Transistors
- Rauschen im Spannungsverstärker
- Ladungsempfindlicher Verstärker
- 1/f Rauschen und Transistor-mismatch

### Rauschen des MOS-Transistors

Der Kanal des MOSFETs kann man sich als einen Widerstand mit ungleichmäßiger Ladungsträgerdichte vorstellen.

Thermisches Rauschen des Kanals kann man mit einer Stromquelle modellieren. Deren spektrale Leistungsdichte kann man wie bei einem Widerstand berechnen:

$$S_{IT} = \frac{4kT}{\langle R \rangle} \quad (1)$$

$1 / \langle R \rangle$  ist der Durchschnittliche Leitwert des Kanals:

$$\frac{1}{\langle R \rangle} = \frac{e\mu W \langle Q' \rangle}{L} \quad (2)$$

$\langle Q' \rangle$  ist die durchschnittliche Ladung/Fläche (Einheit C/m<sup>2</sup>). Sie kann wie folgend berechnet werden:

$$\langle Q' \rangle = \frac{1}{L} \int_0^L Q'(x) dx \quad (3)$$

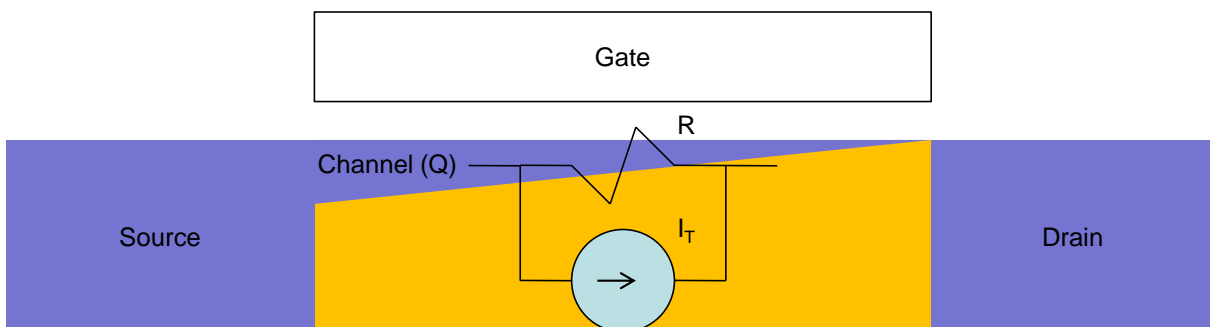


Abbildung 1: Thermisches Rauschen im MOSFET Kanal

Wenn wir (3) in (2) und (1) einsetzen, bekommen wir die Formel für die spektrale Leistungsdichte:

$$S_{IT} = 4kT\mu \frac{W}{L} \langle Q' \rangle = \frac{4kTW\mu}{L^2} \int_0^L Q'(x) dx \quad (4)$$

Nehmen wir an, der Transistor ist in Sättigung.

In der Nähe von Source gilt:

$$Q'(0) = C'_{ox}(V_{gs} - V_{th})$$

In der Nähe von Drain ist die Ladung:

$$Q'(L) = 0$$

Genauere Berechnung des Integrals führt zu:

$$\langle Q \rangle = \frac{2}{3} C'_{ox} (V_{gs} - V_{th}) \quad (5)$$

(Die genaue Herleitung der Formel (5) ist im nächsten Absatz.)

Durch einsetzen von (5) in (4) bekommen wir

$$S_{IT} = 4kT\mu \frac{W}{L} \frac{2}{3} C'_{ox} (V_{gs} - V_{th}) \quad (6)$$

Die Transkonduktanz des Transistors ist durch folgende Formel gegeben:

$$g_m = \frac{dI_{dssat}}{dV_{gs}} = \frac{d}{dV_{gs}} \left( \frac{1}{2n} \mu C'_{ox} \frac{W}{L} (V_{gs} - V_{th})^2 \right) = \frac{1}{n} \mu C'_{ox} \frac{W}{L} (V_{gs} - V_{th}) \quad (7)$$

Wenn wir die Formel für  $g_m$  (7) in die für  $S_{IT}$  (6) einsetzen, bekommen wir die endgültige Formel für die spektrale Leistungsdichte der Stromrauschquelle in einem MOSFET

$$S_{IT} = 4kTn \frac{2}{3} g_m \quad (8)$$

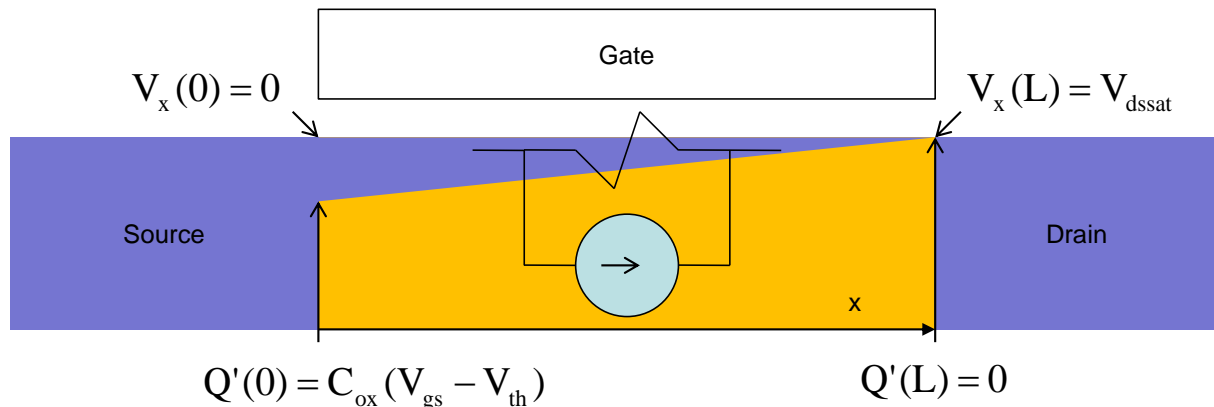


Abbildung 2: Thermisches Rauschen im MOSFET Kanal

### Herleitung der Formel für Transistor-Strom $I_{ds}$ und die Mittlere Kanalladung

In der Vorlesung 2 hatten wir folgende Formel für die Kanalladung pro Fläche:

$$Q' = C'_{ox} (V_{gs} - V_{th}) \quad (9)$$

Die Formel gilt in starker Inversion für kleine  $V_{ds}$ .

Für größere  $V_{ds}$ , muss die Formel angepasst werden. Die Kanalladung pro Fläche ändert sich von dem Wert gegeben durch (9) an der Source-Seite bis null an der Drain-Seite, da dort der Kanal abschnürt (Abbildung 2).

Bezeichnen wir das Potential im Kanalbereich (an der Grenze zwischen Silizium und Silizium-Dioxid) als  $V_x(x)$ . Koordinate  $x$  verläuft von Source zum Drain (Abbildung 2). Definieren wir  $V_x$  in Bezug auf das Source-Potential  $V_s$ . Das bedeutet:

$$V_x(0) = 0$$

und

$$V_x(L) = V_{ds}$$

Die Kanalladung pro Fläche in einem beliebigen Punkt  $x$  ist:

$$Q'(x) = C_{ox}(V_{gs} - V_{th} - nV_x) \quad (10)$$

Oder vereinfacht

$$Q'(x) = C_{ox}(V_{gst} - nV_x); \quad V_{gst} \equiv V_{gs} - V_{th} \quad (11)$$

Leiten wir zuerst die Gleichung für  $I_{ds}$  Strom für beliebige  $V_{ds}$  her. In Vorlesung 2 hatten wir eine vereinfachte Herleitung für kleine  $V_{ds}$  gemacht.

Fangen wir mit der Formel für Driftstrom an:

$$I_{ds} = \mu W Q'(x) |E_x| = \mu C'_{ox} W (V_{gst} - nV_x) |E_x| \quad (12)$$

$E_x$  ist die E-Feld Komponente in  $x$ -Richtung,  $W$  ist Gate-Breite,  $\mu$  ist Beweglichkeit der Ladungsträger.

Es gilt:

$$|E_x| = \frac{dV_x}{dx} \quad (13)$$

Wenn wir (13) in (12) einsetzen, bekommen wir:

$$I_{ds} = \mu C'_{ox} W (V_{gst} - nV_x) \frac{dV_x}{dx}$$

oder

$$I_{ds} dx = \mu C'_{ox} W (V_{gst} - nV_x) dV_x \quad (14)$$

Wir können die beiden Seiten integrieren:

$$\int_0^L I_{ds} dx = \int_0^{V_{ds}} \mu C'_{ox} W (V_{gst} - nV_x) dV_x$$

Es folgt:

$$I_{ds} = \frac{1}{2n} \mu C'_{ox} \frac{W}{L} \left[ V_{gst}^2 - (V_{gst} - nV_{ds})^2 \right]$$

Nachdem wir den zweiten Ausdruck quadrieren, bekommen wir die allgemeine Formel für Transistorstrom:

$$I_{ds} = \mu C'_{ox} \frac{W}{L} \left[ V_{gst} V_{ds} - n \frac{V_{ds}^2}{2} \right] \quad (15)$$

In Sättigung gilt:

$$V_{ds} = V_{dssat} = \frac{V_{gst}}{n} \quad (16)$$

Wenn wir dies in (15) einsetzen, bekommen wir die Formel für Sättigungsstrom:

$$I_{dssat} = \frac{1}{2n} \mu C'_{ox} \frac{W}{L} V_{gst}^2 \quad (17)$$

Berechnen wir nun die durchschnittliche Kanalladung in einem Transistor in Sättigung:

$$\langle Q' \rangle = \frac{1}{L} \int_0^L Q'(x) dx$$

Fangen wir mit dem Integral an:

$$\int_0^L Q'(x) dx = \int_0^L C'_{ox} (V_{gst} - nV_x) dx$$

Das Integral ist die Gesamtladung im Kanal dividiert durch W.

Da wir die Funktion  $V_x(x)$  nicht kennen, ändern wir die Integrationsvariable von x in  $V_x$  (Substitution):

$$\frac{Q}{W} = \int_0^L C'_{ox} (V_{gst} - nV_x) dx = \int_0^L C'_{ox} (V_{gst} - nV_x) \frac{dV_x}{dV_x/dx} = \int_0^{V_{dssat}} C'_{ox} (V_{gst} - nV_x) \frac{dV_x}{|E_x|}$$

Das E-Feld kann mit (12) berechnet werden:

$$I_{ds} = \mu C'_{ox} W (V_{gst} - nV_x) |E_x|; \Rightarrow |E_x| = \frac{I_{ds}}{\mu C'_{ox} W (V_{gst} - nV_x)} \quad (18)$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \frac{Q}{W} &= \int_0^{V_{dssat}} C'_{ox} (V_{gst} - nV_x) \frac{dV_x}{|E_x|} = \frac{\mu (C'_{ox})^2 W}{I_{ds}} \int_0^{V_{dssat}} (V_{gst} - nV_x)^2 dV_x \\ &= \frac{\mu (C'_{ox})^2 W}{n I_{ds}} \left[ \frac{(V_{gst} - nV_{dssat})^3}{3} - \frac{(V_{gst})^3}{3} \right] = \frac{\mu (C'_{ox})^2 W (V_{gst})^3}{n I_{ds} \cdot 3} \end{aligned} \quad (19)$$

In Sättigung gilt  $I_{ds} = I_{dssat}$ . Wenn wir (17) in (19) einsetzen, bekommen wir:

$$\frac{Q}{W} = \frac{\mu (C'_{ox})^2 W (V_{gst})^3}{n I_{ds} \cdot 3} = \frac{2}{3} L C'_{ox} V_{gst} \quad (20)$$

Deswegen ist es:

$$\langle Q' \rangle = \frac{1}{L} \int_0^L Q'(x) dx = \frac{2}{3} C'_{ox} V_{gst} \quad (21)$$

## Beispiel Spannungsverstärker

Betrachten wir den Spannungsverstärker wie in der Vorlesung 6. Betrachten wir die Variante mit dem MOSFET Verstärker und Widerstand  $R_f$ . Wir benutzen den Widerstand  $R_f$  für die DC Rückkopplung.

Wir haben in Vorlesung 6 die Übertragungsfunktion hergeleitet

$$V_o(s) = -\frac{C_i}{C_f} \frac{V_s(s)}{(sT_r+1)(sT_f+1)} \quad (22)$$

Die Zeitkonstanten sind:

$$T_r = \frac{s(C_i C_o + C_i C_f + C_f C_o)}{C_f g_m} \quad (23)$$

und

$$T_f = R_f C_f \quad (24)$$

Wenn wir am Eingang eine Spannungsstufe mit Amplitude 1 haben, steigt die Ausgangsspannung (als Betrag) innerhalb  $3 \times T_r$  bis etwa  $C_i/C_f$  und sinkt wieder auf 0 (Abbildung 3 oben). (Die Verstärkung ist negativ.)

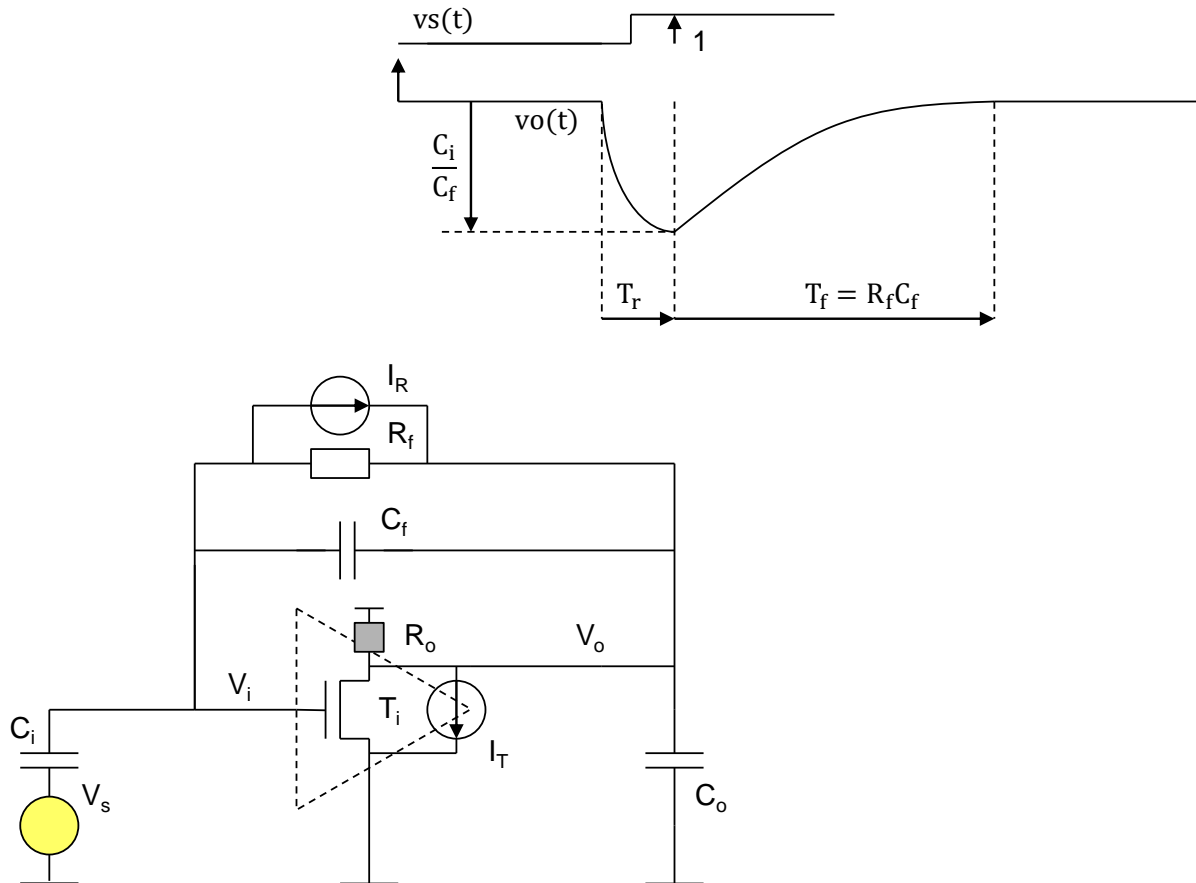


Abbildung 3: Spannungverstärker mit Rauschquellen. Die Abbildung oben zeigt die Sprungantwort.

Die wichtigsten Rauschquellen sind der Transistor  $T_i$  (Rauschquelle  $I_T$ ) und der Widerstand  $R_f$  (Rauschquelle  $I_R$ ).

Generell, die Komponenten, die an Eingang des Verstärkers angeschlossen sind, erzeugen starkes Rauschen am Ausgang. Widerstand  $R_o$  trägt wenig zum Rauschen bei da er an den Ausgang angeschlossen ist.

Abbildung 3 zeigt die Schaltung mit den Rauschquellen  $I_T$  und  $I_R$  (weiß) sowie der Eingangssignalquelle  $V_s$  (gelb), die in weiterer Analyse ausgeschaltet wird.

Wir werden die frequenzabhängige Rauschanalyse durchführen.

### Schritt 1

Wir können die Transistor-Rauschquelle an den Eingang verschieben (Abbildung 4).

Dabei hilft uns folgende Idee: Rauschen des Transistors kann entweder mit der Stromquelle  $S_{IT}$  zwischen den Drain und Source modelliert werden oder mit der Spannungsquelle  $S_{VT}$  am Gate. Da eine zusätzliche Spannung am Gate -  $v_g$  - einen Drain-Source Strom  $g_m \times v_g$  erzeugt, und da die Leistungsdichten zu Quadraten von Spannung oder Strom proportional sind, gilt folgendes:

$$S_{VT} = \frac{S_{IT}}{g_m^2} = \frac{4\frac{2}{3}kTn}{g_m} \quad (25)$$

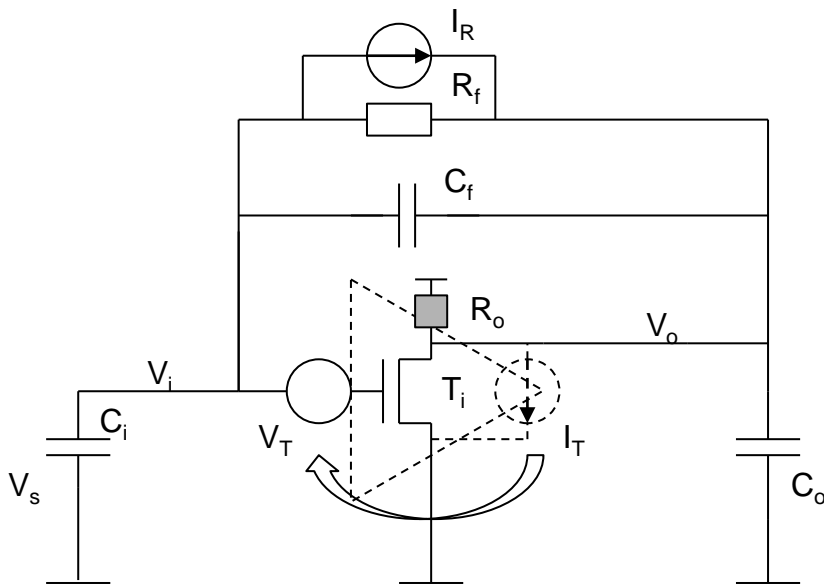


Abbildung 4: Die Rauschquelle  $I_R$  kann auf Transistoreingang verschoben werden

## Schritt 2: Verschiebung von Quelle $I_R$

Die Stromquelle  $I_R$  liegt zwischen dem Eingang und dem Ausgang des Verstärkers (Abbildung 3). Der Strom, den die Rauschquelle in den Ausgang leitet, erzeugt wenig Rauschen. Der Rauschstrom, der in den Eingang reinfließt wird vom Verstärker verstärkt und erzeugt starkes Rauschen. Deswegen ist es für die Rauschrechnung am Ausgang unerheblich ob die Quelle zwischen dem Eingang und dem Ausgang oder zwischen dem Eingang und der Masse angeschlossen wird. Wir werden die Quelle  $I_R$  dann zwischen dem Eingang und der Masse anschliessen, da es so einfacher ist die Übertragungsfunktion zu berechnen (Abbildung 5).

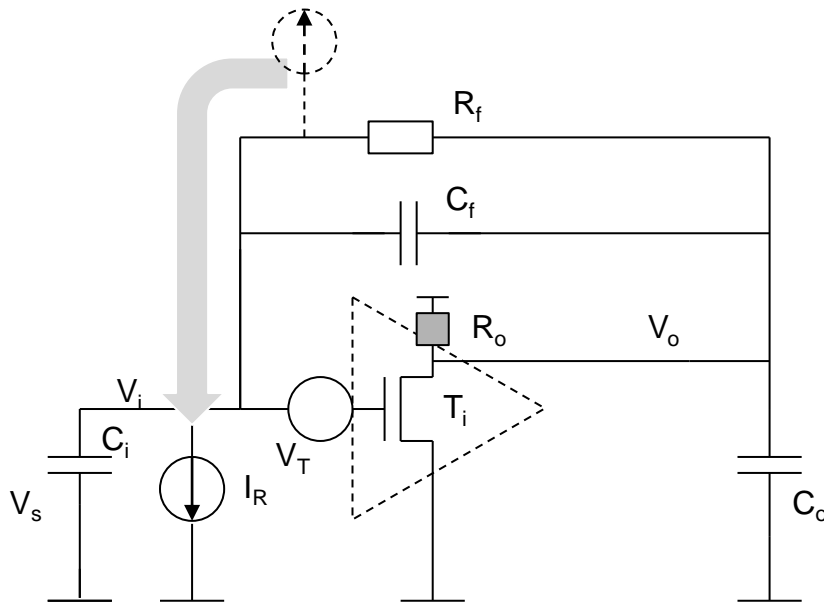


Abbildung 5: Verschiebung von Rauschquelle  $I_R$

### Schritt 3

Um die Varianz (Leistung) vom Rauschsignal am Ausgang zu berechnen, werden wir die Formel für Rauschen im Frequenzdomain (Vorlesung 14) verwenden. Wenn es mehrere Rauschquellen gibt, können Ihre Beiträge separat gerechnet werden. Gesamt-Rauschleistung ist die Summe von einzelnen Beiträgen.

$$\langle v_o^2 \rangle = \int_0^\infty (S_{I_R}(f) |H_{I_R}(i\omega)|^2 + S_{V_T}(f) |H_{V_T}(i\omega)|^2) df \quad (26)$$

Wir brauchen nun die Übertragungsfunktionen  $H(i\omega)$  für zwei Rauschquellen.

### Schritt 4

Übertragungsfunktion für die Quelle  $I_R$ .

Wir werden eine vereinfachte Analyse machen und annehmen, dass wir im Punkt  $v_i$  virtuelle Masse haben (Abbildung 6).

$$H(i\omega) = \frac{dV_o}{dI_R} = -Z_f = -\frac{R_f}{1+sR_fC_f} \quad (27)$$

Beitrag der Quelle  $I_R$  zum Gesamtrauschen ist:

$$\langle V_{oIR} \rangle^2 = \int_0^\infty S_{IR} \left| \frac{R_f}{1+i\omega T_f} \right|^2 df = S_{IR} \frac{R_f^2}{2\pi T_f} \int_0^\infty \left| \frac{R_f}{1+i\omega T_f} \right|^2 d(\omega T_f) = S_{IR} \frac{R_f^2}{2\pi T_f} \tan^{-1}(\omega T_f) \Big|_0^\infty = S_{IR} \frac{R_f^2}{2\pi T_f} \frac{\pi}{2} = S_{IR} \frac{1}{4} \frac{R_f}{C_f} \quad (28)$$

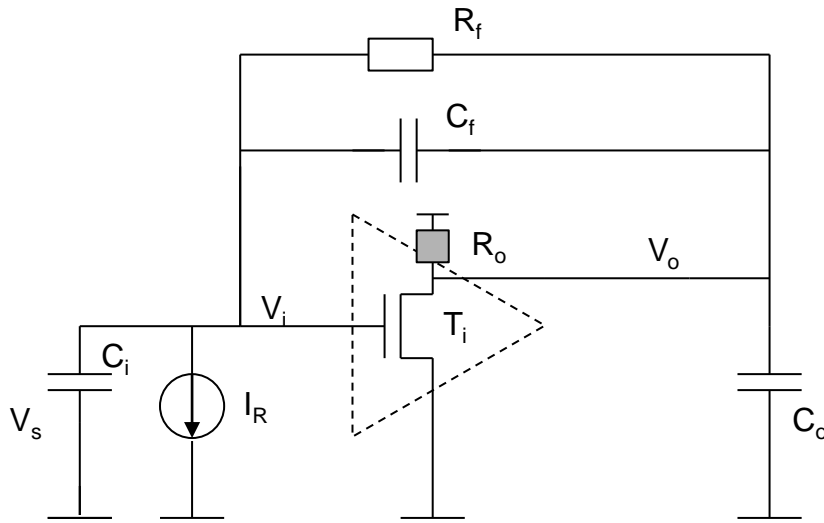


Abbildung 6: Rauschquelle  $I_R$

Wenn wir die Formel für die spektrale Leistungsdichte einsetzen, bekommen wir:

$$\langle V_{oIR} \rangle^2 = \frac{1}{4} S_{IR} \frac{R_f}{C_f} = \frac{1}{4} \frac{R_f}{C_f} \frac{4kT}{R_f} = \frac{kT}{C_f} \quad (29)$$

Es ist das gleiche Ergebnis wie im Fall vom reset des Sensors mit der Kapazität C. (Vorlesung 14).

Abbildung 7 zeigt noch das Bode-Diagramm der Übertragungsfunktion  $|H|^2$ . Die gelbe Fläche trägt maßgeblich zum Integral in (28) bei.

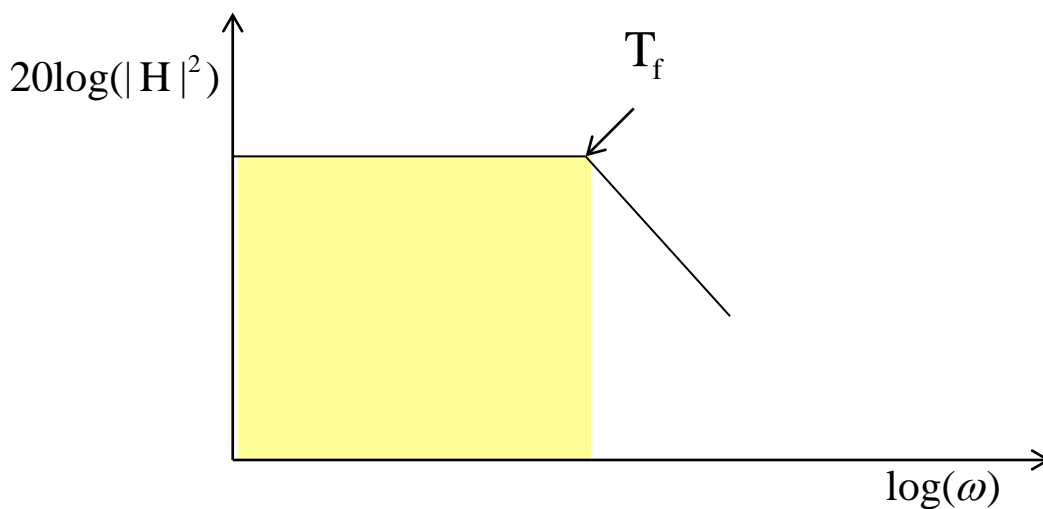


Abbildung 7: Bode-Diagramm der Übertragungsfunktion  $H_{IR}$

Die Formel für die Rauschleistung verursacht durch die Quelle  $I_R$  kann wie folgend umgeschrieben werden:



$$\langle v_{oIR} \rangle^2 = \frac{1}{4} \frac{1}{C_f^2} S_{IR} T_f \quad (30)$$

Wir benutzen dabei das Ergebnis  $T_f = R_f C_f$ .

Diese Formel ist leicht zu verstehen: Die Rauschleistung hängt von der spektralen Leistungsdichte  $S$  multipliziert mit der Zeitkonstante  $T_f$  ab.

### Schritt 5

Für die Spannungsquelle  $V_T$  können wir die Übertragungsfunktion wie folgend herleiten: Wir nehmen an, dass  $v_i$  virtuelle Masse ist (Abbildung 8). Daraus folgt:

$$V_o = -\frac{Z_i + Z_f}{Z_i} V_T = -\frac{\frac{R_f}{1+i\omega R_f C_f} + \frac{1}{i\omega C_i}}{\frac{1}{i\omega C_i}} V_T = \frac{1+i\omega R_f(C_f+C_i)}{1+i\omega R_f C_f} V_T$$

Die Übertragungsfunktion ist:

$$H(i\omega) = \frac{V_o}{V_T} = \frac{1+i\omega R_f(C_f+C_i)}{1+i\omega R_f C_f} = \frac{1+i\omega R_f(C_f+C_i)}{1+i\omega T_f} \quad (31)$$

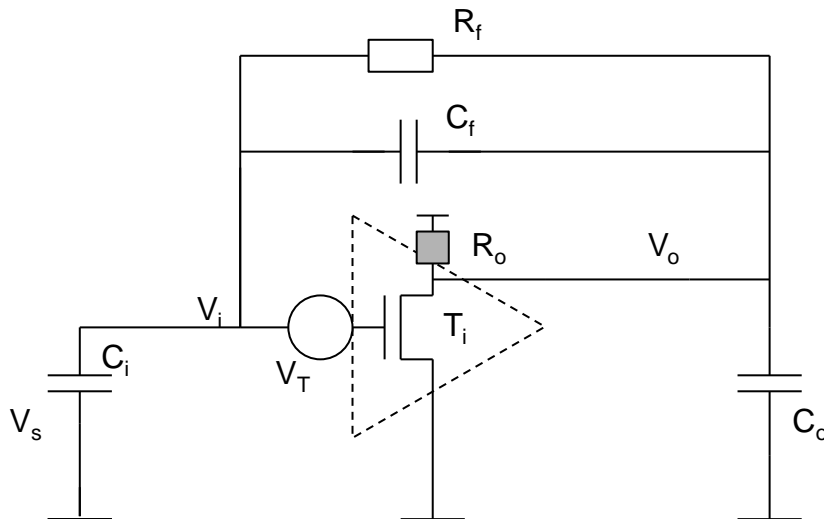


Abbildung 8: Rauschquelle  $V_T$

Beachten wir, dass diese Übertragungsfunktion (31) eine konstante Verstärkung für hohe Frequenzen voraussagt (Abbildung 9). Wenn wir diese Funktion in der Formel (26) einsetzen, bekommen wir unendliche Rauschleistung. Etwas ist falsch.

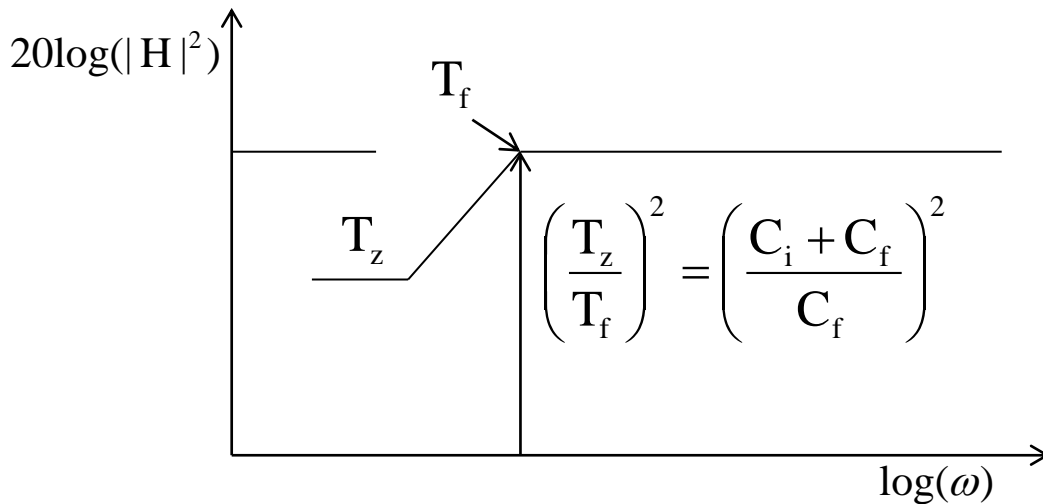


Abbildung 9: Bode-Diagramm der Übertragungsfunktion  $H_{IR}$ , Fall ohne  $T_r$

Für hohe Frequenzen gilt die Annahme über virtuelle Masse nicht mehr. Wir haben in Vorlesung 6 eine genauere Analyse der Schaltung gemacht. Damals haben wir zwei Zeitkonstanten in der Übertragungsfunktion bekommen:

$$T_r = \frac{C_i C_o + C_i C_f + C_f C_o}{C_f g_m} \quad (32)$$

$$T_f = R_f C_f \quad (33)$$

Die Schaltung in Vorlesung 6 war gleich wie die Schaltung in Abbildung 8 bis auf die Position der Eingangsquelle. Die Position der Eingangsquelle verändert die Zeitkonstanten im Nenner der Übertragungsfunktion (die Polestellen) nicht.

Wir können die Formel (31) erweitern indem wir die zweite Zeitkonstante hinzufügen:

$$H(i\omega) = \frac{V_o}{V_T} = \frac{(1+i\omega T_z)}{(1+i\omega T_r)(1+i\omega T_f)} \quad (34)$$

mit:

$$T_r = \frac{C_i C_o + C_i C_f + C_f C_o}{C_f g_m}$$

$$T_f = R_f C_f$$

$$T_z = R_f (C_f + C_i)$$

Für die Zeitkonstanten gilt:

$$T_z > T_f > T_r$$

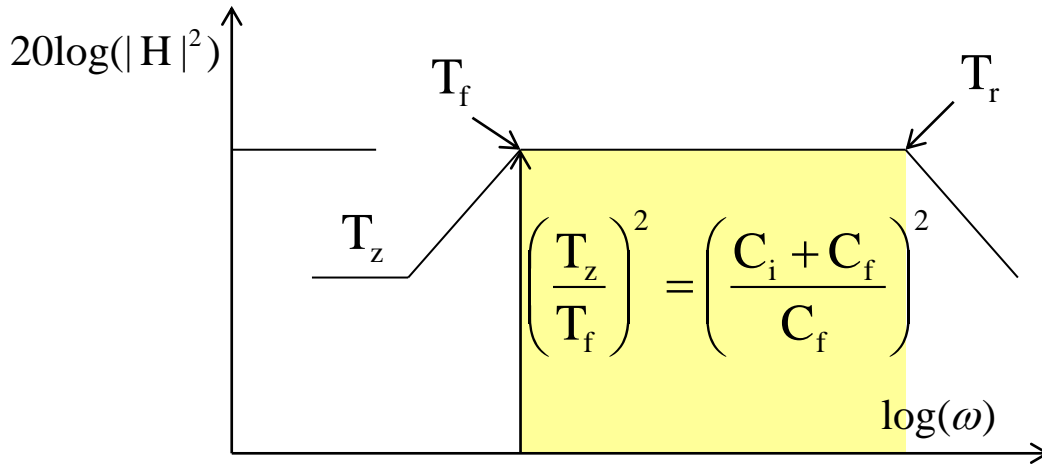


Abbildung 10: Bode-Diagramm der Übertragungsfunktion  $H_{IR}$ , Fall mit  $T_r$

Der Frequenzbereich zwischen  $1/T_f$  und  $1/T_r$  trägt am meistens zum Integral bei (gelbe Fläche in Abbildung 10). In diesem Bereich können wir die Übertragungsfunktion (34) wie folgend vereinfachen:

$$H(i\omega) \sim \frac{T_z}{T_f(1+i\omega T_r)} = \frac{C_f + C_i}{C_f} \frac{1}{1+i\omega T_r} \quad (35)$$

Dann ist es relativ einfach die Rauschleistung zu berechnen:

$$\begin{aligned} \langle v_{oIT} \rangle^2 &= \int_0^\infty S_{VT} \left( \frac{C_f + C_i}{C_f} \right)^2 \left| \frac{1}{1+i\omega T_r} \right|^2 df = S_{VT} \left( \frac{C_f + C_i}{C_f} \right)^2 \frac{1}{2\pi T_r} \frac{\pi}{2} = S_{VT} \left( \frac{C_f + C_i}{C_f} \right)^2 \frac{1}{4T_r} \\ \langle v_{oIT} \rangle^2 &= \frac{4kTn2/3}{g_m} \left( \frac{C_f + C_i}{C_f} \right)^2 \frac{1}{4T_r} = \frac{kTn2/3}{g_m} \left( \frac{C_f + C_i}{C_f} \right)^2 \frac{1}{T_r} \quad (36) \end{aligned}$$

Die Formel für die Rauschleistung wegen Quelle  $I_T$  kann folgenderweise umgeschrieben werden:

$$\langle v_{oIT} \rangle^2 = \frac{1}{4} \left( \frac{C_f + C_i}{C_f} \right)^2 \frac{S_{VT}}{T_r} \quad (37)$$

### Zusammenfassung

Die Varianz vom Rauschsignal am Ausgang des Spannungsverstärkers ist durch folgende Formeln gegeben:

$$\langle v_o \rangle^2 = \langle v_{oIR} \rangle^2 + \langle v_{oIT} \rangle^2 = \frac{1}{4} \frac{1}{C_f^2} ((C_i + C_f)^2 \frac{S_{VT}}{T_r} + S_{IR} T_f) \quad (38)$$

$$S_{IR} = \frac{4kT}{R_f} \quad (39)$$

$$S_{VT} = \frac{4kTn2/3}{g_m} \quad (40)$$

Eine Spannungsstufe am Eingang mit Amplitude  $V_{isig}$  verursacht ein Ausgangssignal mit der Amplitude (Abbildung 11):

$$V_{osig}^2 = V_{isig}^2 \left( \frac{C_i}{C_f} \right)^2 \quad (41)$$

Signal zu Rauschen Verhältnis (SNR) ist:

$$\frac{\langle v_o \rangle^2}{V_{\text{osig}}^2} = \frac{1}{\text{SNR}^2} = \frac{1}{V_{\text{osig}}^2} \frac{1}{4 C_i^2} ((C_i + C_f)^2 \frac{S_{VT}}{T_r} + S_{IR} T_f) \quad (42)$$

Man kann ein "Equivalent noise signal" (equivalent noise voltage - ENV) definieren als Signal am Eingang, das zum  $\text{SNR} = 1$  führt.

Dieses ENV ist gleich zum "input referred noise".

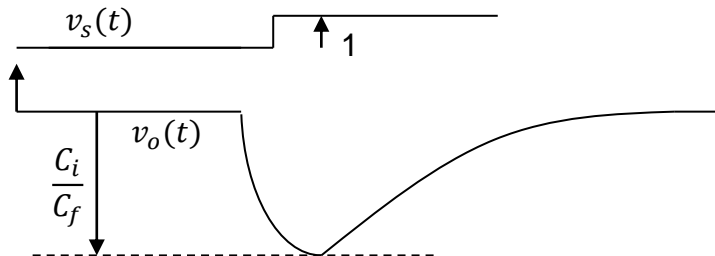


Abbildung 11: Sprungantwort

### Diskussion

Wir möchten die Parameter des Verstärkers optimieren um maximales SNR zu erreichen.

Welche Größen können wir variieren? Wir möchten, dass die Verstärkung  $C_i/C_f$  während Optimierung konstant bleibt.

Wir können  $C_i$  und  $C_f$  um gleichen Faktor vergrößern.  $C_f$ - und  $C_i$  Vergrößerung hilft beim  $R_f$ -Rauschbeitrag (30)

$$\langle v_{oIR} \rangle^2 = \frac{1}{4} S_{IR} \frac{R_f}{C_f} = \frac{1}{4} \frac{R_f}{C_f} \frac{4kT}{R_f} = \frac{kT}{C_f} \quad (43)$$

Transistorrauschbeitrag bleibt unverändert (37).

$$\langle v_{oIT} \rangle^2 = \frac{kT^{2/3}}{g_m} \left( \frac{C_f + C_i}{C_f} \right)^2 \frac{1}{T_r} \quad (44)$$

Wir können  $C_o$  vergrößern. Größere  $C_o$  macht den Verstärker langsamer und hilft beim Transistorrauschen. Das folgt aus der Formel für die Zeitkonstante:

$$T_r = \frac{C_i C_o + C_i C_f + C_f C_o}{C_f g_m} \quad (45)$$

und der Formel (37)

Wir können die Transkonduktanz  $g_m$  vergrößern indem wir den Transistor und  $R_o$  multiplizieren. Größere  $g_m$  (bei konstanten  $C_o$ ) macht den Transistor schneller und lässt das Rauschen unverändert. (Siehe die Formel 37 und die Formel für die Zeitkonstante  $T_r$  (45).)

### Optimierung des Verstärkers um ein bestimmtes SNR, eine bestimmte Verstärkung und die Bandbreite zu erreichen

Starten wir mit „minimum size“  $C_f$  (z.B. 10 fF) und mit einem kleinem Transistor und kleinem Transistorstrom (z.B. 10  $\mu\text{A}$ ). Die Dimensionierungsmethode wie in der Übung kann angewandt werden.

Skalieren wir zuerst  $C_f$  und  $C_i$  hoch, so dass der  $R_f$  - Rauschbeitrag klein genug wird.

Vergrößern wir  $C_o$ , bis der Transistorrauschbeitrag klein genug wird.

Prüfen wir ob der Verstärker eine ausreichende Bandbreite hat, bzw. schnell genug ist.

Wenn der Verstärker zu langsam ist, vergrößern wir  $g_m$  indem wir den Transistor und den  $R_o$  multiplizieren.

Diese Methode kann zu viel zu großer  $C_i$  und viel zu großem Stromverbrauch führen.

Für die meisten analogen Schaltungen gilt (s. z.B. Formel 37):

$$\text{SNR}^2 \sim 1/T_r$$

$$\text{SNR}^2 \sim 1/g_m = 1/\text{Stromverbrauch}$$

Manchmal wird, als Maß wie gut eine Schaltung optimiert wurde, oder um verschiedene Schaltungen zu vergleichen, folgende Leistungszahl (figure of merit) definiert:

$$\text{FOM} = \text{Stromverbrauch } T_r / \text{SNR}^2$$

Diese Leistungszahl sollte bei allen gut optimierten Schaltungen ähnlich sein.

Schaltung mit kleinerer FOM ist besser.

## Ladungsempfindlicher Verstärker

Ladungsempfindlicher Verstärker (charge sensitive amplifier) ist eine weitere wichtige Schaltung. Das Eingangssignal ist ein Stromimpuls mit Ladung  $Q$ , das Ausgangssignal ist zur  $Q$  proportional und unabhängig von der Form des Pulses.

Ein ladungsempfindlicher Verstärker (Abbildung 12) hat die gleiche Form wie ein Spannungsverstärker.

Leiten wir die Übertragungsfunktion des ladungsempfindlichen Verstärkers her.

Wir fangen mit den Ergebnissen für den Spannungsverstärker an

Die Spannungsquelle am Eingang (Abbildung 3) kann in eine äquivalente Stromquelle umgewandelt werden (Abbildung 12).

Für den Strom der Stromquelle und die Spannung der Spannungsquelle gilt:

$$i_s(s)/s C_i = v_s(s).$$

In Zeitbereich ist der Strom  $i(t)$  Integral der Spannung  $v(t)$  dividiert durch  $C_i$ .

Das heißt, wenn die Spannungsquelle eine Spannungsstufe mit der Amplitude  $Q/C_i$  erzeugt, generiert die Stromquelle einen Impuls mit der Ladung  $Q$ .

Wir haben in Vorlesung 6 für den Spannungsverstärker hergeleitet, dass eine Spannungsstufe mit der Amplitude 1 ein Ausgangssignal mit der Amplitude  $1/C_f$  erzeugt.

Daraus folgt: Ein Stromimpuls mit der Ladung  $Q$  erzeugt ein Ausgangssignal mit der Amplitude  $Q/C_f$ . (Abbildung 12) Die Ausgangsspannung steigt innerhalb  $3 \times T_r$  bis zur maximalen Amplitude ( $Q/C_f$ ) und sinkt wieder auf 0. (Die Verstärkung ist negativ.)

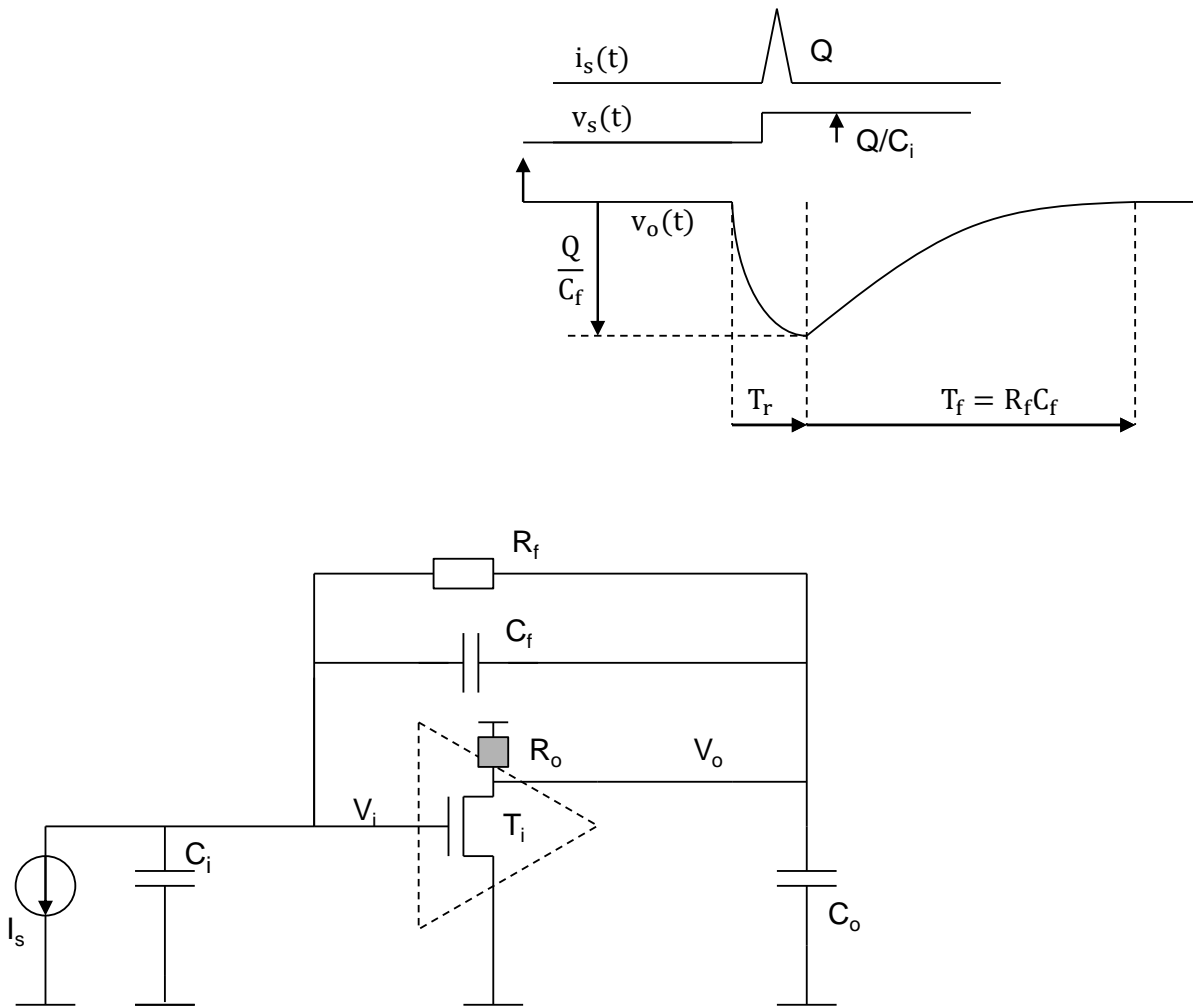


Abbildung 12: Ladungsempfindlicher Verstärker. Oben - Impulsantwort

In der Schaltung gibt es drei Haupttrauschquellen (Abbildung 13): der Eingangstransistor (Quelle  $V_T$ ), der Widerstand  $R_f$  (Quelle  $I_R$ ).

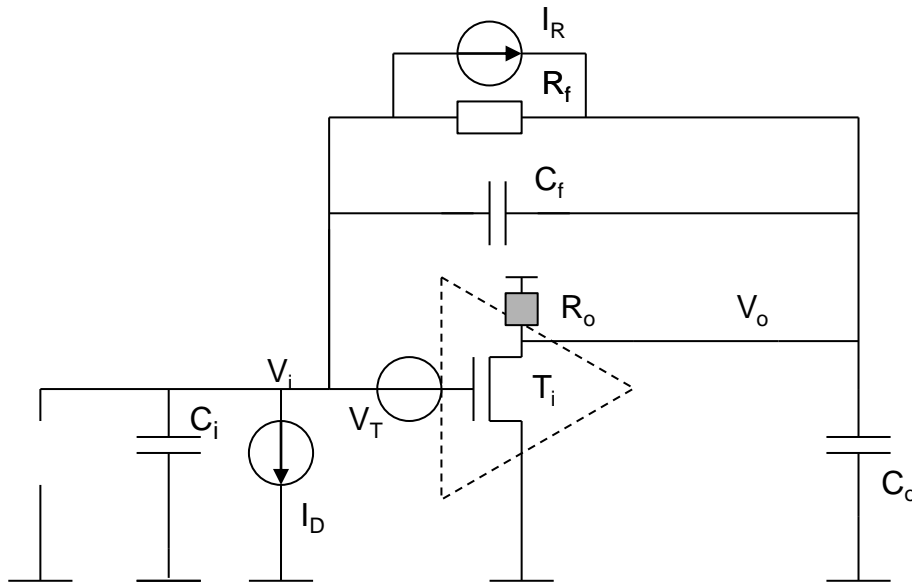


Abbildung 13: Ladungsempfindlicher Verstärker. Rauschquellen

Die dritte Quelle haben wir im Fall, dass ein Sensor mit dem Leckstrom an den Verstärker als Signalquelle angeschlossen ist (Rauschquelle  $I_D$ ). Es wird angenommen, dass der Sensor Schrotrauschen erzeugt.

Die Signalamplitude ist:

$$V_{\text{osig}}^2 = \left( \frac{Q_{\text{isig}}}{C_f} \right)^2 \quad (46)$$

Da die Schaltung gleiche Form wie der Spannungsverstärker hat, gelten auch dieselben Formeln.

So ist die Varianz des Rauschsignals am Ausgang:

$$\langle v_o \rangle^2 = \frac{1}{4} \frac{1}{C_f^2} \left( (C_i + C_f)^2 \frac{S_{VT}}{T_r} + S_{IR} T_f + S_{ID} T_f \right) \quad (47)$$

Die spektralen Rauschdichten sind

$$S_{VT} = \frac{4kTn2/3}{g_m}$$

(thermisches Rauschen)

$$S_{IR} = \frac{4kT}{R_f}$$

(thermisches Rauschen)

$$S_{ID} = 2eI_{\text{leak}}$$

(Schrotrauschen)

Signal zu Rauschen Verhältnis (SNR) ist:

$$\frac{\langle v_o \rangle^2}{V_{\text{osig}}^2} = \frac{1}{\text{SNR}^2} = \frac{1}{V_{\text{osig}}^2} \frac{1}{4 C_i^2} ((C_i + C_f)^2 \frac{S_{VT}}{T_r} + S_{IR} T_f) \quad (48)$$

Equivalent noise signal (charge), definiert als das Ladungssignal am Eingang, das zum  $\text{SNR} = 1$  führt ist:

$$\text{ENC}^2 = \frac{1}{4} ((C_i + C_f)^2 \frac{S_{VT}}{T_r} + S_{IR} T_f + S_{ID} T_f) \quad (49)$$

Ein Eingangssignal = ENC erzeugt am Ausgang ein Signal mit der Amplitude, die gleich wie die Standardabweichung des Rauschsignals ist. Es ist etwa das kleinste messbare Signal, wenn die Messung nur einmal wiederholt wird.

Abbildung 14 illustriert die Optimierung des ladungsempfindlichen Verstärkers für maximales SNR.

Es ist gut  $C_i$  zu minimieren.

Kurze Zeitkonstante  $T_f$  ist gut um den Sensorrauschbeitrag zu minimieren.

Langsame Zeitkonstante  $T_r$  ist gut um den Beitrag von Transistorrauschen zu verkleinern

Man kann zeigen dass SNR maximal ist, wenn beide Zeitkonstanten ähnlich groß sind.

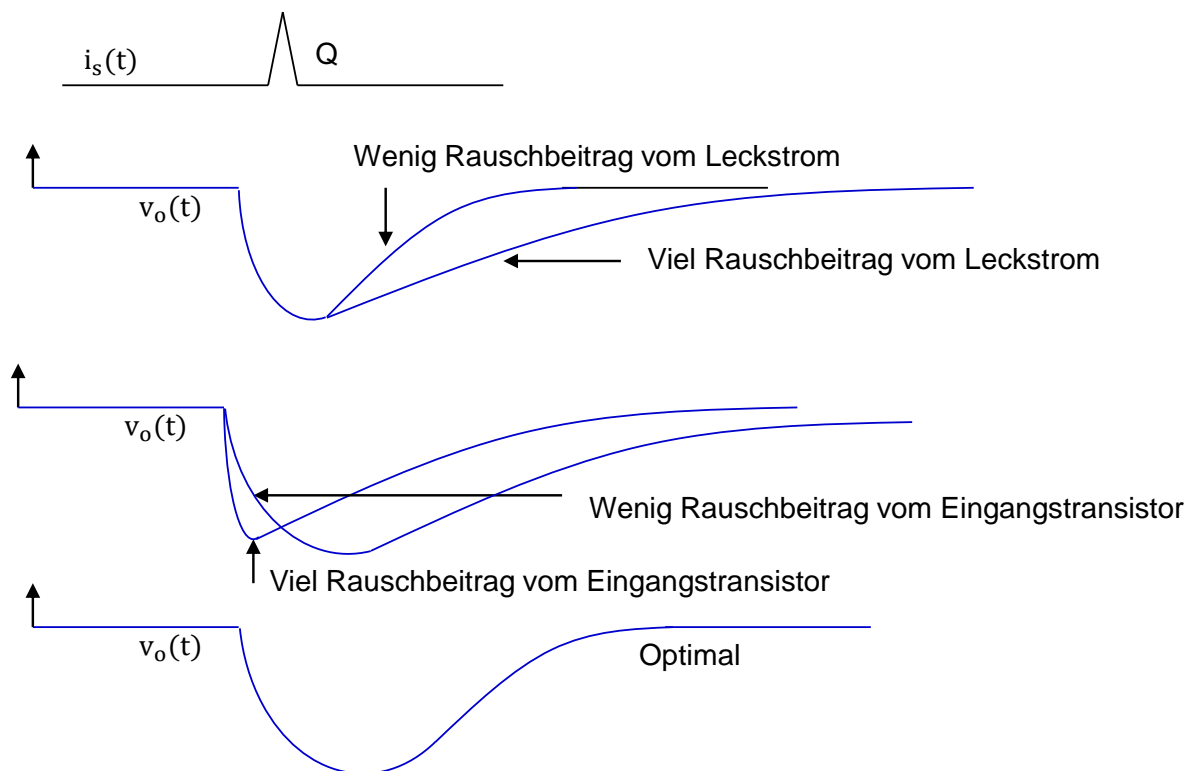


Abbildung 14: Rauschen und Zeitkonstanten



### 1/f Rauschen und Transistor-mismatch

Für das 1/f Rauschen kann man folgendes Modell verwenden. Transistorstrom (in starker Inversion) hängt von Gesamtladung im Kanal. Die MOS-Struktur ist elektroneutral, deswegen ist die Summe von Ladungsmenge unterhalb von Gate-Elektrode gleich der Ladung in der Gate-Elektrode. Nehmen wir nun an, dass es im Silizium-Dioxid, in der Nähe von Silizium trap-Zustände (Fallen) für die Ladungsträger (NMOS: Elektronen) gibt. Die Elektronen aus dem Kanal können in diesen traps eingefangen werden. Dadurch verringert sich die Ladungsmenge im Kanal. Nehmen wir an, dass die mittlere Zahl von besetzten trap-Zuständen pro Flächeneinheit  $\langle n_{it} \rangle$  ist. Nehmen wir auch an, dass die Zahl von getrappten Elektronen  $LW n_{it}$  ein Poisson-verteilter Zufallswert ist. Berechnen wir, wie die Zahl der getrappten Elektronen den Transistor-Strom beeinflusst, bzw. berechnen wir die Varianz des Stromes. Wir könnten solche Varianz erwarten wenn mehrere unkorrelierte Strom-Messungen an einem Transistor vorgenommen werden oder wenn Ströme von einer Gruppe identischer Transistoren gemessen werden. Diese Analyse kann uns keine Vorstellung über die Zeitabhängigkeit oder Frequenzabhängigkeit des Rauschsignals geben, nur über die Fluktuation der Strommessung wenn voneinander unabhängige Messungen gemacht werden.

Der Transistorstrom (starke Inversion, Sättigung) ist durch die folgende Formel gegeben:

$$I_{dssat} = \frac{1}{2n} \mu C'_{ox} \frac{W}{L} V_{gst}^2 \quad (50)$$

Berechnen wir den Strom als Funktion von Gesamtladung im Kanal. Die Ladung ist:

$$Q = \frac{2}{3} LWC'_{ox} V_{gst} \quad (51)$$

Wenn wir diese Formel in (50) einsetzen, bekommen wir:

$$I_{dssat} = \frac{3}{4n} \frac{\mu}{L^2} V_{gst} Q \quad (52)$$

Die getrappte Ladung  $e L W n_{it}$  führt zu einer Änderung ist der Kanalladung  $dQ$ :

$$dQ = eLW n_{it} \quad (53)$$

Die Änderung ist der Kanalladung führt zu folgender Stromänderung:

$$dI_{dssat} = \frac{3}{4n} \frac{\mu}{L^2} V_{gst} dQ \quad (54)$$

Die Varianz dieser Änderung ist:

$$\langle dI_{dssat}^2 \rangle = \left( \frac{3}{4n} \frac{\mu}{L^2} V_{gst} \right)^2 \langle dQ^2 \rangle \quad (55)$$

Die Varianz von  $dQ$  ist.

$$\langle dQ^2 \rangle = e^2 \langle (L W n_{it})^2 \rangle \quad (56)$$

Wegen der Annahmen der Poisson-Verteilung, gilt:

$$\langle dQ^2 \rangle = e^2 \langle (L W n_{it})^2 \rangle = e^2 L W \langle n_{it} \rangle \quad (57)$$

Wenn wir das in (55) einsetzen, bekommen wir:

$$\langle dI_{dssat}^2 \rangle = \left( \frac{3}{4n} \frac{\mu}{L^2} V_{gst} \right)^2 e^2 L W \langle n_{it} \rangle = \mu e^2 \langle n_{it} \rangle \frac{1}{L^2} \left( \frac{3}{4} \right)^2 2 \left( \frac{1}{2n} \mu C'_{ox} \frac{W}{L} V_{gst}^2 \right) \sim \frac{\mu e^2 \langle n_{it} \rangle I_{dssat}}{L^2} \quad (58)$$

oder

$$\frac{\langle dI_{dssat}^2 \rangle}{I_{dssat}^2} \sim \frac{\mu e^2 \langle n_{it} \rangle}{I_{dssat} L^2} \quad (59)$$

Die relative Stromänderung wird kleiner wenn L vergrößert wird.

Identische Abhängigkeit der relativen Stromänderung (Stromfehlers) von L und  $I_{dssat}$  gilt auch wenn es um statistisches mismatch von identischen Transistoren (und deren Strömen) handelt. Lange Transistor-Gates sind vorteilhaft.

Wenn unsere Schaltung durch 1/f Rauschen oder durch Transistor-mismatch negativ beeinflusst wird, muss die Gate-Länge von kritischen Transistoren vergrößert werden. Um dadurch  $V_{dssat}$  nicht zu ändern, muss gleichzeitig die Gate-Breite (W) hochskaliert werden.

Ein hochpass-Filter, hochpass-Verhalten von  $H(s)$ , oder eine kapazitive Kopplung macht eine Schaltung weniger auf 1/f Rauschen oder Transistor-mismatch empfindlich. Die Verwendung vom Hochpass-Filter ähnelt einer doppelten Messung, wo zuerst eine Nullmessung und danach eine Signalmessung durchgeführt werden und anschließend die Differenz berechnet wird. Solche Differenz-Messungen werden wenig von langsamen Schwankungen beeinflusst, die durch 1/f Rauschen oder durch Transistor-mismatch entstehen.